I 수와 연산

배운 내용

초 3~4
- 자연수

초 5~6
- 약수와 배수
- 최대공약수와 최소공배수
- 분수의 사칙계산

이 단원의 내용

1 소인수분해
- 소인수분해
- 최대공약수와 최소공배수

2 정수와 유리수
- 정수와 유리수
- 수의 대소 관계
- 정수와 유리수의 덧셈, 뺄셈
- 정수와 유리수의 곱셈, 나눗셈

배울 내용

중 2
- 유리수와 순환소수

중 3
- 제곱근과 실수

영상과 영하, 지상과 지하, 골프 스코어와 같이 **서로 반대되는 성질을 가진 양**을 구분하여 나타내면 편리하다.
이 단원에서는 자연수를 소인수분해하는 방법과 정수, 유리수의 뜻과 계산 방법을 알아본다.

1 소인수분해

준비 학습

약수와 배수

❶ 다음을 모두 구하시오.

(1) 24의 약수 (2) 6의 배수

(3) 24와 36의 공약수 (4) 6과 8의 공배수

최대공약수와 최소공배수

❷ 16과 24의 최대공약수와 최소공배수를 구하시오.

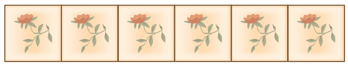
1 소인수분해

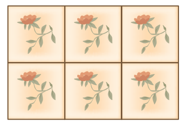
소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해할 수 있다.

소수와 합성수

생각 톡

크기가 같은 정사각형 모양의 타일 6장을 이어 붙여 가로, 세로를 구분하지 않고 직사각형 모양을 만드는 방법은 다음과 같이 2가지이다. 이와 같은 방법으로 2장 이상의 타일로 직사각형 모양을 만들려고 한다.





탐구 ① 타일 5장으로 직사각형 모양을 만드는 방법은 몇 가지인지 구해 보자.

탐구 ② 직사각형 모양을 만드는 방법이 1가지인 경우는 타일이 몇 장일 때인지 말해 보자.

2, 3, 5와 같은 수는 소수(素數)이고, 0.2, 3.28과 같은 수는 소수(小數)이다.

소수는 약수가 2개이고, 합성수는 약수가 3개 이상이다.

자연수 2, 3, 5의 약수는 1과 자기 자신뿐이다. 이와 같이 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수를 **소수**라고 한다.

또 1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수를 **합성수**라고 한다. 즉 합성수는 1과 자기 자신 이외의 약수를 갖는다.

한편 1은 소수도 아니고 합성수도 아니다.

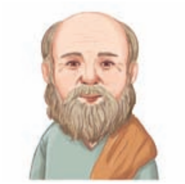
문제 1 다음 수가 소수인지 합성수인지 말하시오.

(1) 13 (2) 21

(3) 34 (4) 49

추론

문제 2 다음에서 옳게 말한 사람을 모두 찾으시오.



오른쪽과 같은 방법으로 소수를 찾은 사람은 고대 그리스 수학자 에라토스테네스(Eratosthenes, B.C. 275~B.C. 194?)이다. 이와 같은 방법을 '에라토스테네스의 체'라고 한다.

소수를 다음과 같은 방법으로 찾아보자.

❶ 1을 지운다.
❷ 2는 남기고 2의 배수를 모두 지운다.
❸ 3은 남기고 3의 배수를 모두 지운다.
❹ 5는 남기고 5의 배수를 모두 지운다.
❺ 이와 같은 방법으로 남은 수 중에서 처음 수는 남기고 그 수의 배수를 모두 지우면 소수만 남는다.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

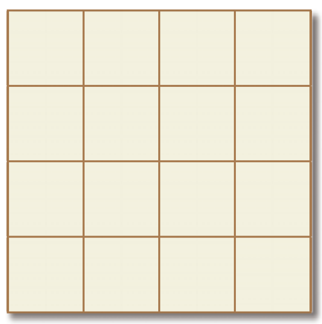
문제 3 **위의 방법을 이용하여 1부터 100까지의 자연수 중에서 소수를 모두 구하시오.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

적용하기

다음 규칙에 따라 빙고 놀이를 해 보자.

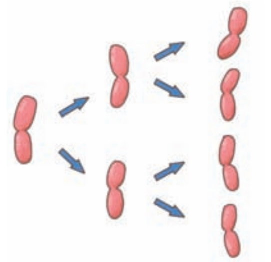
❶ 100 이하의 소수 중에서 16개를 택하여 오른쪽 빙고판을 채운다.
❷ 선생님이 100 이하의 자연수 중에서 한 개를 말한다.
❸ 선생님이 말한 수가 소수이면 빙고판에서 그 수를 지우고, 합성수이면 가장 먼저 손을 든 학생이 말한 소수를 지운다.
❹ ❷, ❸의 과정을 반복하여 가로, 세로 또는 대각선 방향으로 세 줄을 지우고 빙고를 가장 먼저 외친 사람이 우승자이다.



거듭제곱

생각 톡

어떤 세균이 1시간마다 한 번 분열하여 두 배로 증식한다고 한다. 즉 한 마리의 세균이 1시간 후에는 두 마리가 되고, 2시간 후에는 네 마리가 된다.



탐구 ① 한 마리의 세균이 3시간 후에는 몇 마리가 되는지 말해 보자.

탐구 ② 한 마리의 세균이 10시간 후에는 몇 마리가 되는지 식으로 나타내어 보자.

같은 수를 여러 번 곱한 것을 곱하는 수와 그 수가 곱해진 개수를 이용하여 간단히 나타내는 방법을 알아보자.

2를 여러 번 곱한 것을 간단히

$$2\times2=2^2,$$
$$2\times2\times2=2^3,$$
$$2\times2\times2\times2=2^4,$$
$$\cdots$$

$2^1=2$로 정한다.

과 같이 나타내고 2^2, 2^3, 2^4, …을 각각 2의 제곱, 2의 세제곱, 2의 네제곱, …이라고 읽는다. 이때 이들을 통틀어 2의 **거듭제곱**이라 하고 곱하는 수 2를 거듭제곱의 **밑**, 2가 곱해진 개수인 2, 3, 4, …를 거듭제곱의 **지수**라고 한다.

2^3 (지수: 3, 밑: 2)

보기 ❶ 5^4에서 밑은 5이고 지수는 4이다.
❷ $2\times2\times2\times7\times7$을 거듭제곱을 이용하여 나타내면 $2^3\times7^2$이다.

문제 4 다음을 거듭제곱을 이용하여 나타내시오.

(1) $3\times3\times3\times3$ (2) $2\times2\times5\times5\times5$

문제 5 다음 □ 안에 알맞은 수를 10의 거듭제곱으로 나타내시오.

(1) 1억 원 = □ 원 (2) 100 km = □ m

소인수분해

생각톡

24를 1이 아닌 자연수의 곱으로 나타내려고 한다.

탐구 ① 24를 두 자연수의 곱으로 나타내어 보자.

탐구 ② 24를 최대한 많은 자연수의 곱으로 나타내어 보자.

24 = □ × ○
24 = □ × ○ × △

24의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이고 이 중에서 소수는 2와 3이다. 이와 같이 어떤 자연수의 약수 중에서 소수인 것을 그 자연수의 **소인수**라고 한다.

즉 24의 소인수는 2와 3이다.

문제 6 **다음 수의 소인수를 모두 구하시오.**

(1) 9 (2) 10 (3) 28 (4) 66

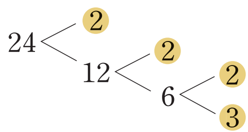
1보다 큰 자연수는 소인수만의 곱으로 나타낼 수 있다. 예를 들어 24를 소인수만의 곱으로 나타내면

$$24=2\times2\times2\times3=2^3\times3$$

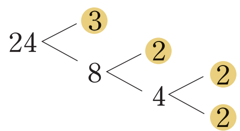
이다.

이와 같이 1보다 큰 자연수를 그 수의 소인수만의 곱으로 나타내는 것을 **소인수분해**라고 한다.

24를 소인수분해하는 방법은 그 순서에 따라 다음과 같이 여러 가지로 생각할 수 있지만 그 결과는 모두 $2^3\times3$으로 같다.



$$24=2\times2\times2\times3$$
$$=2^3\times3$$



$$24=3\times2\times2\times2$$
$$=2^3\times3$$

일반적으로 자연수를 소인수분해한 결과는 곱하는 순서를 생각하지 않으면 오직 한 가지뿐이다.

소인수분해한 결과는 보통 크기가 작은 소인수부터 순서대로 쓰고, 같은 소인수의 곱은 거듭제곱으로 나타낸다.

예제 1 **60을 소인수분해하시오.**

풀이

$$\begin{aligned}60&=2\times30\\&=2\times2\times15\\&=2\times2\times3\times5\\&=2^2\times3\times5\end{aligned}$$

$$60 \begin{cases}2\\30\begin{cases}2\\15\begin{cases}3\\5\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

$60=2^2\times3\times5$

$$\begin{array}{r|l}2 & 60\\ \hline 2 & 30\\ \hline 3 & 15\\ \hline & 5\end{array}$$

$60=2^2\times3\times5$

답 $2^2\times3\times5$

문제 7 **다음 수를 소인수분해하시오.**

(1) 45 (2) 84 (3) 150

소인수분해를 이용하여 자연수의 약수를 편리하게 구할 수 있다.

예제 2 **소인수분해를 이용하여 98의 약수를 모두 구하시오.**

풀이 $98=2\times7^2$이므로 98의 약수는 2의 약수 1, 2와 7^2의 약수 1, 7, 7^2 중에서 각각 하나씩 골라 서로 곱한 것이다.
따라서 98의 약수는 1, 2, 7, 14, 49, 98이다.

×	**1**	**7**	$\mathbf{7^2}$
1	1	7	49
2	2	14	98

답 1, 2, 7, 14, 49, 98

문제 8 **다음 수의 약수를 모두 구하시오.**

(1) $2^3\times5$ (2) 72 (3) 500

확인하기

1 다음 수가 소수인지 합성수인지 말하시오.

(1) 19 (2) 41 (3) 57 (4) 91

2 360을 소인수분해하면 $2^a\times3^b\times5$일 때, 자연수 a, b의 값을 구하시오.

사고력+ 다음 수를 두 소수의 합으로 나타내시오.

(1) 8 (2) 12 (3) 80

수학 역량 플러스

비밀의 언어, 암호

추론 창의·융합

암호는 영화 속 스파이들만 쓰는 것이 아니라 정치, 행정, 산업, 금융 등 실생활의 여러 분야에서 널리 쓰인다. 암호를 만드는 방식을 공개해도 숨겨진 의미를 찾아내기 어려운 암호 체계를 '공개 열쇠 암호 체계'라고 하는데 그중 대표적인 것이 RSA 암호 체계이다.

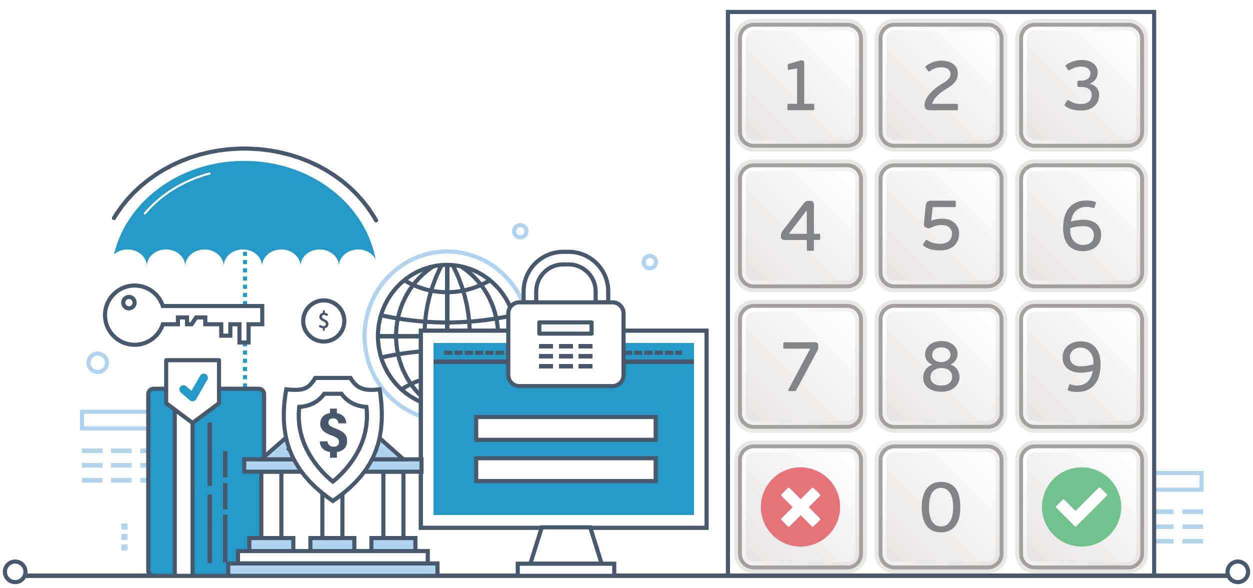
RSA 암호 체계는 큰 수의 소인수분해가 어렵다는 점을 바탕으로 한다. 예를 들어 6012707이 두 소수의 곱으로 만든 수라는 것을 공개해도 어떤 소수의 곱인지 알아내는 것은 쉽지 않다. 즉 두 소수 2357과 2551의 곱이 6012707임을 계산하는 것은 쉽지만 6012707을 2357×2551로 소인수분해하는 것은 매우 어렵다.

실제로 사용되는 RSA 암호 체계는 이보다 훨씬 복잡하고 정교하여 암호를 해독할 수 없도록 만들어져 있다.

(출처: 사이먼 싱, 『코드북』)

활동 1 지아는 두 자리 자연수 A, B$(A<B)$를 나란히 적어 네 자리 비밀번호를 만들고, 찬욱이는 두 자리 자연수 C, D$(C<D)$를 나란히 적어 네 자리 비밀번호를 만들었다. $A \times B=1820$, $C \times D=2419$일 때, 두 사람의 비밀번호를 구해 보자.

활동 2 활동 1 에서 두 사람의 비밀번호를 구할 때, 어떤 차이가 있는지 설명해 보자.



2 최대공약수와 최소공배수

최대공약수와 최소공배수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

소인수분해와 최대공약수

생각톡

주한이는 사과 8개와 귤 12개를 여러 개의 접시에 나누어 담으려고 한다.

탐구 ① 각 접시의 사과의 개수가 같도록 나누어 담을 때, 몇 개의 접시에 담을 수 있는지 말해 보자.

탐구 ② 각 접시의 귤의 개수가 같도록 나누어 담을 때, 몇 개의 접시에 담을 수 있는지 말해 보자.

탐구 ③ 각 접시의 사과와 귤의 개수가 각각 같도록 나누어 담을 때, 최대 몇 개의 접시에 담을 수 있는지 그려 보자.

두 개 이상의 자연수의 공통인 약수가 공약수이고, 공약수 중에서 가장 큰 것이 최대공약수이다. 예를 들어 두 자연수 8과 12의 공약수는 1, 2, 4이고 최대공약수는 4이다.

이때 8과 12의 공약수는 모두 최대공약수인 4의 약수임을 알 수 있다. 이와 같이 두 개 이상의 자연수의 공약수는 모두 최대공약수의 약수이다.

한편 두 자연수 8과 21의 최대공약수는 1이다. 이와 같이 최대공약수가 1인 두 자연수를 **서로소**라고 한다.

문제 1 **다음에서 두 수가 서로소인 것을 모두 찾으시오.**

(1) 5, 8　　(2) 12, 51

(3) 15, 23　　(4) 26, 91

소인수분해를 이용하여 두 수의 최대공약수를 구해 보자.

36과 60을 각각 소인수분해하면

$$36=2^2\times3^2,\quad 60=2^2\times3\times5$$

이다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 36 & 60 \\ \hline 2 & 18 & 30 \\ \hline 3 & 9 & 15 \\ \hline & 3 & 5 \end{array}$$

$2\times2\times3=12$ 최대공약수

이때 36과 60의 공통인 소인수 2와 3의 거듭제곱에서 지수가 작거나 같은 2^2과 3을 택하여 이를 모두 곱하면

$$2^2\times3=12$$

이다. 이는 36과 60의 최대공약수와 같다.

$$\begin{array}{r} 36=2^2\times3^2 \\ 60=2^2\times3\times5 \\ \hline 2^2\times3 \end{array}$$

이와 같이 두 수의 최대공약수는 두 수를 각각 소인수분해한 후 공통인 소인수의 거듭제곱에서 지수가 작거나 같은 것을 모두 곱하여 구할 수 있다.

문제 2 **다음 두 수의 최대공약수를 구하시오.**

(1) $2^4\times3^2$, 2×3^3　　(2) 3×5^2, $2\times5^3\times7$

(3) 63, 105　　(4) 192, 216

세 수의 최대공약수도 두 수일 때와 마찬가지 방법으로 구할 수 있다.

예제 1 **소인수분해를 이용하여 세 수 54, 90, 126의 최대공약수를 구하시오.**

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 54 & 90 & 126 \\ \hline 3 & 27 & 45 & 63 \\ \hline 3 & 9 & 15 & 21 \\ \hline & 3 & 5 & 7 \end{array}$$

$2\times3\times3=18$

풀이 세 수를 각각 소인수분해하면

$$54=2\times3^3$$
$$90=2\times3^2\times5$$
$$126=2\times3^2\times7$$

따라서 세 수의 최대공약수는

$$2\times3^2=18$$

$$\begin{array}{r} 54=2\times3^3 \\ 90=2\times3^2\times5 \\ 126=2\times3^2\quad\times7 \\ \hline 2\times3^2 \end{array}$$

답 18

문제 3 **다음 세 수의 최대공약수를 구하시오.**

(1) $2^5\times3^2$, $2^2\times3^4$, $2^2\times3^5$　　(2) $2^3\times3$, $2\times3\times5^2$, 3×5^3

(3) 48, 56, 144　　(4) 120, 180, 252

최대공약수를 활용하여 문제를 해결해 보자.

예제 2 **가로의 길이가 300 cm, 세로의 길이가 72 cm인 직사각형 모양의 벽에 크기가 같은 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 붙이려고 한다. 되도록 큰 타일을 사용하려고 할 때, 타일의 한 변의 길이를 구하시오.**

풀이 타일의 한 변의 길이는 300과 72의 공약수이므로 되도록 큰 타일을 사용하려면 타일의 한 변의 길이는 300과 72의 최대공약수이어야 한다.

오른쪽과 같이 소인수분해를 이용하여 300과 72의 최대공약수를 구하면

$$2^2\times3=12$$

이므로 타일의 한 변의 길이는 12 cm이다.

$$\begin{aligned}300&=2^2\times3\times5^2\\72&=2^3\times3^2\\\hline&\;\;2^2\times3\end{aligned}$$

답 12 cm

문제 4 **장미 45송이, 튤립 75송이, 카네이션 30송이를 모두 사용하여 여러 개의 꽃다발을 만들려고 한다. 각 꽃다발마다 들어가는 장미, 튤립, 카네이션의 개수가 각각 같도록 할 때, 최대 몇 개의 꽃다발을 만들 수 있는지 구하시오.**

소인수분해와 최소공배수

생각톡

세계 각지에서 미술 행사가 정기적으로 열리는데 2년마다 열리는 행사를 비엔날레, 3년마다 열리는 행사를 트리엔날레라고 한다.

탐구 올해 어느 도시에서 비엔날레와 트리엔날레가 동시에 열렸다면 두 행사가 처음으로 다시 동시에 열리는 해는 몇 년 후인지 구해 보자.

두 개 이상의 자연수의 공통인 배수가 공배수이고, 공배수 중에서 가장 작은 것이 최소공배수이다. 예를 들어 두 자연수 8과 12의 공배수는 24, 48, 72, …이고 최소공배수는 24이다.

이때 8과 12의 공배수는 모두 최소공배수인 24의 배수임을 알 수 있다. 이와 같이 두 개 이상의 자연수의 공배수는 모두 최소공배수의 배수이다.

소인수분해를 이용하여 두 수의 최소공배수를 구해 보자.

12와 30을 각각 소인수분해하면

$$12=2^2\times3,\quad 30=2\times3\times5$$

이다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 12 & 30 \\ \hline 3 & 6 & 15 \\ \hline & 2 & 5 \end{array}$$

$2\times3\times2\times5=60$

최소공배수

이때 12와 30의 공통인 소인수 2와 3의 거듭제곱에서 지수가 크거나 같은 2^2과 3을 택하고, 공통이 아닌 소인수 5의 거듭제곱 5를 택하여 이를 모두 곱하면

$$2^2\times3\times5=60$$

이다. 이는 12와 30의 최소공배수와 같다.

$$\begin{array}{l} 12=2^2\times3 \\ 30=2\ \ \times3\times5 \\ \hline \quad\ \ 2^2\times3\times5 \end{array}$$

이와 같이 두 수의 최소공배수는 두 수를 각각 소인수분해한 후 공통인 소인수의 거듭제곱에서 지수가 크거나 같은 것과 공통이 아닌 소인수의 거듭제곱을 모두 곱하여 구할 수 있다.

문제 5 **다음 두 수의 최소공배수를 구하시오.**

(1) 3^2, $2^5\times3$

(2) $2\times3^2\times5$, $2^2\times7$

(3) 18, 48

(4) 45, 99

세 수의 최소공배수도 두 수일 때와 마찬가지 방법으로 구할 수 있다.

예제 3 **소인수분해를 이용하여 세 수 24, 60, 70의 최소공배수를 구하시오.**

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 24 & 60 & 70 \\ \hline 2 & 12 & 30 & 35 \\ \hline 3 & 6 & 15 & 35 \\ \hline 5 & 2 & 5 & 35 \\ \hline & 2 & 1 & 7 \end{array}$$

$2\times2\times3\times5\times2\times7=840$

풀이 세 수를 각각 소인수분해하면

$$24=2^3\times3$$
$$60=2^2\times3\times5$$
$$70=2\times5\times7$$

따라서 세 수의 최소공배수는

$$2^3\times3\times5\times7=840$$

$$\begin{array}{l} 24=2^3\times3 \\ 60=2^2\times3\times5 \\ 70=2\qquad\ \times5\times7 \\ \hline \quad\ \ 2^3\times3\times5\times7 \end{array}$$

답 840

문제 6 **다음 세 수의 최소공배수를 구하시오.**

(1) $2^3\times3^2$, $2^2\times3^2$, $3^2\times11$　　(2) $2^2\times3$, $3^2\times7$, $2\times5^2\times7$

(3) 16, 40, 52　　(4) 20, 35, 75

최소공배수를 활용하여 문제를 해결해 보자.

예제 4 **가로의 길이가 10 cm, 세로의 길이가 12 cm, 높이가 15 cm인 직육면체 모양의 상자를 빈틈없이 쌓아 정육면체 모양의 의자를 만들려고 한다. 되도록 상자를 적게 사용하려고 할 때, 의자의 한 모서리의 길이를 구하시오.**

풀이 의자의 한 모서리의 길이는 10, 12, 15의 공배수이므로 되도록 상자를 적게 사용하려면 의자의 한 모서리의 길이는 10, 12, 15의 최소공배수이어야 한다.

오른쪽과 같이 소인수분해를 이용하여 10, 12, 15의 최소공배수를 구하면

$$2^2\times3\times5=60$$

이므로 의자의 한 모서리의 길이는 60 cm이다.

답 60 cm

$$\begin{array}{rl} 10= & 2\times5 \\ 12= & 2^2\times3 \\ 15= & 3\times5 \\ \hline & 2^2\times3\times5 \end{array}$$

문제 7 **버스 차고지에서 A노선 버스는 45분마다 한 대씩 출발하고, B노선 버스는 30분마다 한 대씩 출발한다. 오전 10시에 A노선 버스와 B노선 버스가 차고지에서 동시에 출발했을 때, 두 노선의 버스가 처음으로 다시 동시에 출발하는 시각을 구하시오.**

확인하기

1 10 이하의 자연수 중에서 3과 서로소인 수를 모두 구하시오.

2 다음 수들의 최대공약수와 최소공배수를 각각 구하시오.

(1) $2^3\times5$, $2\times3\times5^2$　　(2) 54, 72, 126

수학 역량 플러스

그림으로 알아보는 최대공약수와 최소공배수

문제 해결 추론

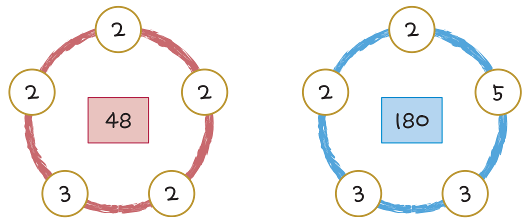
소인수분해를 이용하면 두 수의 최대공약수와 최소공배수를 구할 수 있다. 이를 그림으로 나타내어 보자.

48과 180을 각각 소인수분해하면

$48=2\times2\times2\times2\times3$,

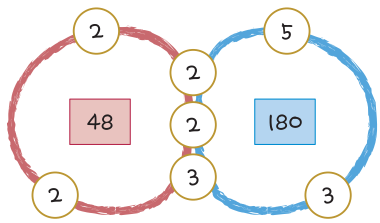
$180=2\times2\times3\times3\times5$

이고, 이것을 [그림 1]과 같이 나타낸다고 하자.



[그림 1]

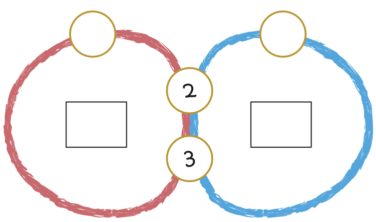
이때 [그림 2]와 같이 2, 2, 3을 공유하도록 연결하면 공유한 원에 적힌 수의 곱 $2\times2\times3$은 48과 180의 최대공약수이고, 원에 적힌 모든 수의 곱 $2\times2\times2\times2\times3\times3\times5$는 48과 180의 최소공배수이다.

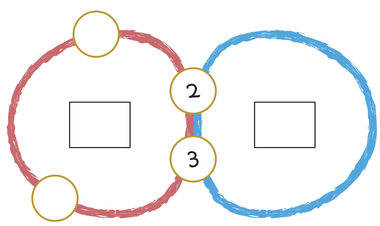


[그림 2]

이와 같은 그림을 이용하면 최대공약수와 최소공배수가 주어질 때, 이를 만족시키는 두 수를 쉽게 구할 수도 있다.

활동 1 최대공약수가 2×3이고 최소공배수가 $2\times3\times5\times7$인 두 수의 쌍을 구하려고 한다. 다음 그림을 완성해 보자.





활동 2 활동 1 의 방법으로 최대공약수가 2×5이고 최소공배수가 $2\times3\times5\times5\times7$인 두 수의 쌍을 모두 구해 보자.

정답 및 풀이 277쪽

중단원 마무리

Ⅰ-1 소인수분해

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

1 소수와 합성수 13쪽

(1) 소수: 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신만을 ☐로 갖는 수

(2) 합성수: 1보다 큰 자연수 중에서 ☐가 아닌 수

2 거듭제곱 15쪽

(1) 거듭제곱: 같은 수를 여러 번 곱한 것을 2^2, 2^3, 2^4, …과 같이 나타낸 것

(2) ☐: 거듭제곱에서 곱하는 수

(3) ☐: 거듭제곱에서 곱해진 수의 개수

3 소인수분해 16쪽

(1) 소인수: 자연수의 약수 중에서 ☐인 수

(2) ☐: 1보다 큰 자연수를 그 수의 소인수만의 곱으로 나타내는 것

4 최대공약수와 최소공배수 19쪽

(1) 서로소: 최대공약수가 ☐인 두 자연수

(2) 최대공약수와 최소공배수를 구할 때에는 각 수를 소인수분해한 후

① 최대공약수는 공통인 소인수의 거듭제곱에서 지수가 작거나 같은 것을 택하여 곱한다.

② 최소공배수는 공통인 소인수의 거듭제곱에서 지수가 크거나 같은 것을 택하고 공통이 아닌 소인수의 거듭제곱도 모두 택하여 곱한다.

표준 문제

01 20과 40 사이의 자연수 중 약수가 2개인 수를 모두 구하시오.

02 옳은 것을 보기에서 모두 고르시오.

보기

(ㄱ) $2^3=6$

(ㄴ) $2\times3\times2\times3\times2=2^3\times3^2$

(ㄷ) $\dfrac{2\times2\times2}{5\times5\times5}=\dfrac{2^3}{5^3}$

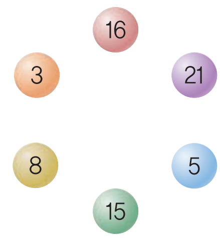
(ㄹ) $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

서술형 **03** 108에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 할 때, 다음에 답하시오.

(1) 108을 소인수분해하시오.

(2) 곱할 수 있는 자연수 중 두 번째로 작은 자연수를 구하시오.

04 오른쪽 그림의 6개의 자연수를 서로소인 수끼리 연결하시오.



05 다음에서 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① 소수는 모두 홀수이다.

② 서로 다른 두 소수는 서로소이다.

③ 합성수는 약수를 3개 이상 갖는다.

④ 1은 모든 자연수와 서로소이다.

⑤ 약수가 4개인 모든 자연수는 두 소수의 곱으로 나타낼 수 있다.

06 두 수 60과 $a^3 \times b$의 최대공약수가 20일 때, 두 소수 a, b의 값을 구하시오.

서술형 **07** 가로, 세로의 길이가 각각 21 cm, 28 cm인 직사각형 모양의 종이를 잘라서 학교 축제에 쓸 정사각형 모양의 입장권을 만들려고 한다. 남는 부분 없이 되도록 입장권을 크게 만들려고 할 때, 종이 한 장으로 만들 수 있는 입장권의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결 **08** 빨간색, 노란색, 파란색의 세 종류의 전구로 나무를 장식하였다. 빨간색 전구는 3초 동안 켜져 있다가 1초 동안 꺼지고, 노란색 전구는 4초 동안 켜져 있다가 1초 동안 꺼진다. 또 파란색 전구는 5초 동안 켜져 있다가 1초 동안 꺼진다. 세 전구가 동시에 켜진 후 처음으로 다시 동시에 켜질 때까지 몇 초가 걸리는지 구하시오.

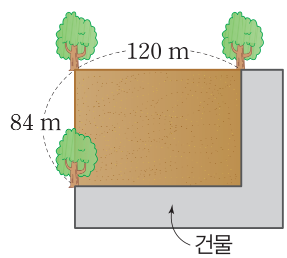
도전 문제

09 100 이하의 자연수 중에서 24와 서로소인 자연수의 개수를 구하시오.

추론 **10** 어떤 두 자연수의 최대공약수가 5이고 최소공배수가 60일 때, 이 두 수의 합을 구하시오. (단, 두 수는 모두 두 자리 자연수이다.)

서술형 **11** 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 120 m, 세로의 길이가 84 m인 직사각형 모양의 학교 운동장의 귀퉁이에 세 그루의 나무가 있다. 나무 사이의 간격이 모두 같도록 운동장의 둘레에 나무를 심는데, 나무를 되도록 적게 심으려고 한다. 다음에 답하시오.

(단, 건물의 둘레에는 나무를 심지 않는다.)



(1) 몇 m의 간격으로 나무를 심어야 하는지 구하시오.

(2) 몇 그루의 나무를 더 심어야 하는지 구하시오.

2 정수와 유리수

준비 학습

분수와 소수의 대소 관계

1 다음 □ 안에 부등호 >, < 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $\frac{1}{3}$ □ 0.5　　(2) 1.7 □ $\frac{3}{2}$

분수의 사칙계산

2 다음을 계산하시오.

(1) $\frac{3}{5}+\frac{1}{3}$　　(2) $\frac{3}{5}-\frac{1}{3}$

(3) $\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}$　　(4) $\frac{3}{5}\div\frac{1}{3}$

1 정수와 유리수

양수와 음수, 정수와 유리수의 개념을 이해한다.

양수와 음수

생각톡

물건에 접촉하지 않고 적외선을 이용하여 온도를 측정하는 온도계가 있다. 이 온도계를 이용하면 영하 18 °C보다 낮은 냉동고의 온도나 영상 1535 °C보다 높은 용광로의 온도를 측정할 수 있다.

탐구 영상 1535 °C를 +1535로 나타낼 때, 영하 18 °C는 어떻게 나타낼지 말해 보자.

영상과 영하, 이익과 손해와 같이 어떤 기준에 대하여 서로 반대가 되는 성질을 갖는 양을 수로 나타낼 때, 한쪽에는 ‘+’, 다른 한쪽에는 ‘−’를 붙여서 나타내면 편리하다.

이때 +를 **양의 부호**, −를 **음의 부호**라고 한다.

+16은 ‘양의 16’, −3은 ‘음의 3’으로 읽는다.

보기 ❶ 영상 16 °C를 +16으로 나타낼 때, 영하 3 °C는 −3으로 나타낼 수 있다.
❷ 2300원 손해를 −2300으로 나타낼 때, 4000원 이익은 +4000으로 나타낼 수 있다.

문제 1 **다음 수를 양의 부호 + 또는 음의 부호 −를 사용하여 나타내시오.**

(1) 출발 10분 전을 −10으로 나타낼 때, 출발 5분 후를 나타내는 수

(2) 해발 1947 m인 한라산의 높이를 +1947로 나타낼 때, 가덕 해저 터널의 최저 수심 48 m를 나타내는 수

(3) 동쪽으로 3 km 떨어진 지점을 +3으로 나타낼 때, 서쪽으로 10 km 떨어진 지점을 나타내는 수

가덕 해저 터널은 부산과 거제를 연결하는 거가 대로의 일부 구간이다.

수에서도 0보다 큰 수는 양의 부호 +를, 0보다 작은 수는 음의 부호 −를 사용하여 나타낸다.

+3, −2에서 부호 +, −는 각각 덧셈, 뺄셈의 기호와 모양은 같지만 뜻은 다르다.

예를 들어

0보다 3만큼 큰 수는 $+3$,　　0보다 2만큼 작은 수는 -2,

0보다 $\frac{1}{2}$만큼 큰 수는 $+\frac{1}{2}$,　0보다 0.7만큼 작은 수는 -0.7

과 같이 나타낸다. 이때 $+3$, $+\frac{1}{2}$과 같이 양의 부호 +를 붙인 수를 **양수**, -2, -0.7과 같이 음의 부호 −를 붙인 수를 **음수**라고 한다.

한편 0은 양수도 아니고 음수도 아니다.

정수와 유리수

생각 톡

다음은 기사의 일부이다.

국토 면적, 1년 새 여의도 4배만큼 증가

국토 교통부가 발표한 2016년 지적 통계 연보에 따르면 지난해 말 우리나라의 총면적은 10만 295 km^2로 1년 전보다 여의도 면적(윤중로 제방 안쪽 기준 2.9 km^2)의 4배인 11 km^2가 증가했다. 국토 면적이 증가한 것은 산업 용지를 확보하기 위해 간척지를 개발했기 때문이다.

국토 면적이 크게 증가한 지역들을 살펴보면 전라남도 광양시에서 공유 수면 매립 및 토지 개발 사업으로 3.9 km^2, 경기도 안산시와 시흥시의 구획 정리 사업으로 1.9 km^2의 땅이 증가했다. 또 인천 신항 신규 등록 등 3개의 사업으로 1.4 km^2가 증가했다.

(출처: 『연합뉴스』, 2016. 5. 16.)

탐구 ① 위의 기사에 나오는 수 중 자연수가 아닌 것을 찾아보자.

탐구 ② 탐구 ①의 수를 분수로 나타내어 보자.

$+1$, $+2$, $+3$, …과 같이 자연수에 양의 부호 +를 붙인 수를 **양의 정수**, -1, -2, -3, …과 같이 자연수에 음의 부호 −를 붙인 수를 **음의 정수**라고 한다.

0은 양의 정수도 아니고 음의 정수도 아니다.

이때 양의 정수, 0, 음의 정수를 통틀어 **정수**라고 한다.

양의 정수 $+1$, $+2$, $+3$, …은 보통 양의 부호 +를 생략하고 1, 2, 3, …과 같이 나타내기도 한다. 즉 양의 정수는 자연수와 같다.

$$\text{정수}\begin{cases}\text{양의 정수(자연수)}\\ 0\\ \text{음의 정수}\end{cases}$$

문제 2 다음에서 양의 정수와 음의 정수를 각각 찾으시오.

-7	8	12	$+3$	0	-41	2

$+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $+\frac{7}{5}$과 같이 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 양의 부호 $+$를 붙인 수를 **양의 유리수**, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{7}{5}$과 같이 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 음의 부호 $-$를 붙인 수를 **음의 유리수**라고 한다.

이때 양의 유리수, 0, 음의 유리수를 통틀어 **유리수**라고 한다.

> $+0.2$, -1.5와 같은 소수는 다음과 같이 분수로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.
> $+0.2=+\frac{1}{5}$,
> $-1.5=-\frac{3}{2}$

양의 유리수도 양의 정수와 마찬가지로 양의 부호 $+$를 생략하여 나타내기도 한다.

한편 정수는 다음과 같이 나타낼 수 있으므로 모두 유리수이다.

$$-2=-\frac{2}{1},\quad 0=\frac{0}{3},\quad 7=\frac{7}{1}$$

> 앞으로 수라고 하면 유리수를 말한다.

유리수는 다음과 같이 분류할 수 있다.

$$\text{유리수}\begin{cases}\text{정수}\begin{cases}\text{양의 정수(자연수)} & +1,\ +2,\ +3,\ \cdots\\ 0 & \\ \text{음의 정수} & -1,\ -2,\ -3,\ \cdots\end{cases}\\ \text{정수가 아닌 유리수} \quad +4.7,\ -0.2,\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{100},\ \cdots\end{cases}$$

문제 3 다음에서 정수가 아닌 유리수를 모두 찾으시오.

-4	0.8	$+\frac{8}{2}$	0	$+\frac{15}{8}$	3.25	-62.7

표현하기

음의 부호를 붙여 나타낼 수 있는 수를 포함한 문장을 2개 이상 만들고, 이를 음수로 나타내어 보자.

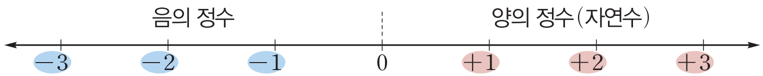
예 나는 지난달에 비해 몸무게가 1.5 kg 줄었다. ➔ -1.5

수직선

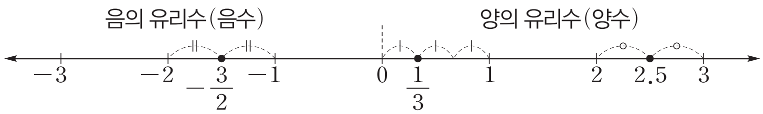
정수를 직선 위에 나타내어 보자.

직선 위에 기준이 되는 점을 정하여 그 점에 0을 대응시키고, 그 점의 좌우에 일정한 간격으로 점을 잡아서 오른쪽의 점에 양의 정수 $+1$, $+2$, $+3$, …을, 왼쪽의 점에 음의 정수 -1, -2, -3, …을 대응시킨다.

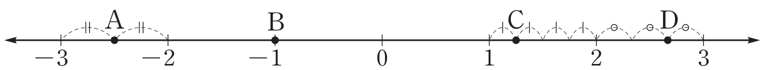
이와 같이 수를 대응시킨 직선을 **수직선**이라고 한다.



유리수도 정수와 마찬가지로 수직선 위에 나타낼 수 있다. 예를 들어 $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, 2.5를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



문제 4 **다음 수직선에서 네 점 A, B, C, D가 나타내는 수를 말하시오.**



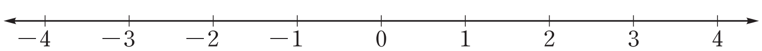
확인하기

1 다음 수가 해당되는 곳에 ○표를 하시오.

	$-\frac{7}{2}$	$+5$	0.25	0	$-\frac{6}{2}$	-1.7	50
양수							
음수							
정수							
유리수							

2 다음 수를 수직선 위에 나타내시오.

(1) $+4$ (2) -3.5 (3) 1.75 (4) $-\frac{7}{3}$



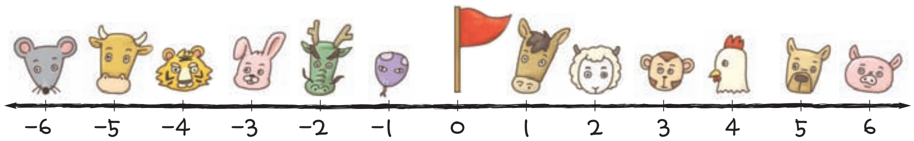
2 수의 대소 관계

정수와 유리수의 대소 관계를 판단할 수 있다.

절댓값

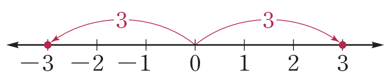
생각 톡

수직선 위의 0을 나타내는 점에 깃발을 놓고, 띠를 나타내는 12가지 동물들을 다음 그림과 같이 놓았다.



탐구 ① 양이 깃발에서 2만큼 떨어진 거리에 있다고 할 때, 소는 깃발에서 얼마만큼 떨어진 거리에 있는지 말해 보자.

탐구 ② 깃발에서 3만큼 떨어진 거리에 있는 동물을 모두 말해 보자.



수직선 위에서 3을 나타내는 점과 -3을 나타내는 점은 모두 0을 나타내는 점으로부터 3만큼 떨어져 있다.

이와 같이 어떤 수를 수직선 위에 나타낼 때, 0을 나타내는 점과 그 수를 나타내는 점 사이의 거리를 그 수의 **절댓값**이라 하고, 이것을 기호 $|\quad|$를 사용하여 나타낸다.

예를 들어 $+3$과 -3의 절댓값은 각각 3이고 이것을 기호로

$$|+3|=3, \quad |-3|=3$$

과 같이 나타낸다. 특히 0의 절댓값은 0, 즉 $|0|=0$이다.

문제 1 다음 수의 절댓값을 기호를 사용하여 나타내고 그 값을 구하시오.

(1) $+12$ (2) $+7.19$ (3) -8 (4) $-\frac{5}{2}$

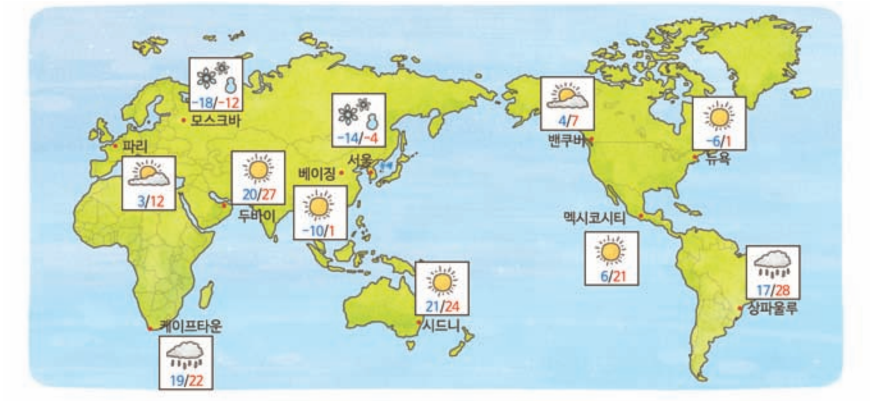
문제 2 절댓값이 다음과 같은 수를 모두 구하시오.

(1) 7 (2) 4.1 (3) $\frac{3}{8}$ (4) 0

수의 대소 관계

생각 톡

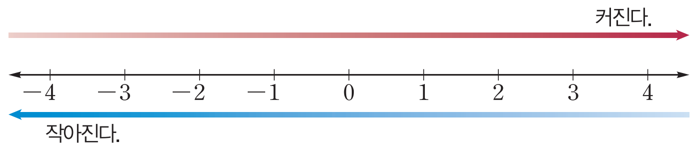
다음은 어느 날 세계 여러 도시의 최고 기온과 최저 기온을 나타낸 것이다. 예를 들어 서울의 최고 기온은 $-4\,^\circ\mathrm{C}$, 최저 기온은 $-14\,^\circ\mathrm{C}$이다.



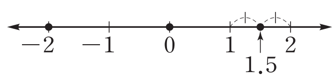
탐구 ① 최고 기온이 가장 높은 도시를 말해 보자.

탐구 ② 최저 기온이 가장 낮은 도시를 말해 보자.

자연수를 수직선 위에 나타내면 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다. 마찬가지로 유리수를 수직선 위에 나타내면 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다.



예를 들어 세 수 -2, 0, 1.5를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 세 수의 대소 관계는 다음과 같다.



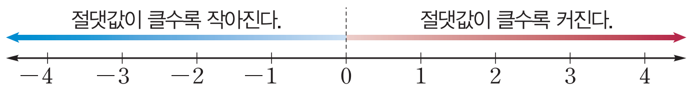
$$-2<0,\quad 0<1.5,\quad -2<1.5$$

0<(양수)
(음수)<0
(음수)<(양수)

수직선에서 양수는 0의 오른쪽에, 음수는 0의 왼쪽에 있으므로 양수는 0보다 크고 음수는 0보다 작다.

따라서 양수는 음수보다 크다.

또 수를 수직선 위에 나타낼 때, 양수끼리는 0을 나타내는 점에서 멀리 떨어진 수, 즉 절댓값이 큰 수가 크다. 그러나 음수끼리는 0을 나타내는 점에서 멀리 떨어진 수, 즉 절댓값이 큰 수가 작다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

수의 대소 관계

❶ 양수는 0보다 크고 음수는 0보다 작다.
❷ 양수는 음수보다 크다.
❸ 양수끼리는 절댓값이 큰 수가 크다.
❹ 음수끼리는 절댓값이 큰 수가 작다.

보기 ❶ 두 양수 $\frac{5}{3}$와 1.8에서 1.8의 절댓값이 $\frac{5}{3}$의 절댓값보다 크므로

$\frac{5}{3}<1.8$

$|-4.2|=4.2$, $|-7|=7$

❷ 두 음수 -4.2와 -7에서 -7의 절댓값이 -4.2의 절댓값보다 크므로

$-4.2>-7$

문제 3 다음 □ 안에 부등호 $>$, $<$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $2 \ \square \ -3.5$ (2) $-8.3 \ \square \ 0$

(3) $2.74 \ \square \ 3$ (4) $-\frac{3}{4} \ \square \ -\frac{5}{8}$

문제 4 다음 수를 작은 것부터 순서대로 나열하시오.

$3.1 \qquad -\frac{3}{2} \qquad 0 \qquad \frac{7}{2} \qquad -2 \qquad -0.6$

이상: 크거나 같다.
이하: 작거나 같다.
초과: 크다.
미만: 작다.

어떤 수 a에 대하여 'a는 2보다 크거나 같다.' 또는 'a는 2 이상이다.'를 기호 $\geq$를 사용하여

$$a \geq 2$$

와 같이 나타낸다.

또 'a는 2보다 작거나 같다.' 또는 'a는 2 이하이다.'를 기호 $\leq$를 사용하여

$$a \leq 2$$

와 같이 나타낸다.

한편 'a는 -2보다 크거나 같고 3보다 작다.'는

$$-2 \leq a < 3$$

과 같이 나타낸다.

문제 5 **다음을 부등호를 사용하여 나타내시오.**

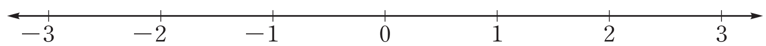
(1) a는 4 이상이다.

(2) b는 $-\frac{2}{7}$보다 크고 3.6보다 작거나 같다.

확인하기

1 다음 수를 수직선 위에 나타내시오.

(1) 절댓값이 2.5인 수　　(2) 절댓값이 1인 양수　　(3) 절댓값이 $\frac{1}{4}$인 음수



2 다음 $\square$ 안에 부등호 $>$, $<$ 중 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $-3 \ \square \ -5$　　(2) $\left|-\frac{5}{2}\right| \ \square \ \frac{12}{5}$　　(3) $\left|-\frac{9}{4}\right| \ \square \ |-2.8|$

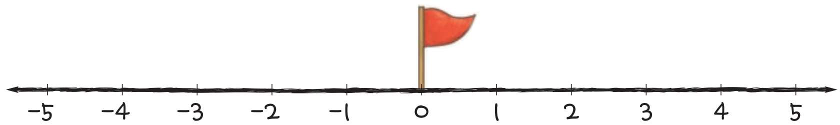
3 정수와 유리수의 덧셈, 뺄셈

정수와 유리수의 덧셈, 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

정수와 유리수의 덧셈

생각톡

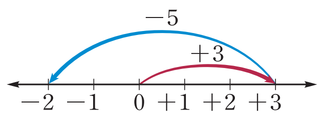
다음 그림과 같이 수직선 위의 0을 나타내는 점에 깃발을 놓았다.



탐구 ① 깃발을 오른쪽으로 2만큼 이동시킨 후 다시 오른쪽으로 3만큼 이동시켰을 때, 깃발이 놓인 지점이 나타내는 수를 말해 보자.

탐구 ② 깃발을 오른쪽으로 3만큼 이동시킨 후 다시 왼쪽으로 5만큼 이동시켰을 때, 깃발이 놓인 지점이 나타내는 수를 말해 보자.

위의 생각톡에서 깃발을 오른쪽으로 3만큼 이동시킨 것은 $+3$으로 나타내고, 왼쪽으로 5만큼 이동시킨 것은 -5로 나타낼 수 있다.



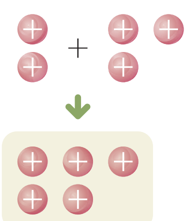
이와 같이 생각하면 0을 나타내는 점에서 오른쪽으로 3만큼 이동시킨 후 다시 왼쪽으로 5만큼 이동시킨 것은

$$(+3)+(-5)$$

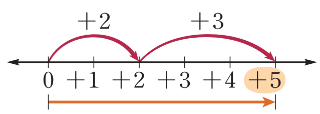
와 같이 나타낼 수 있다.

이와 같은 방법으로 수직선을 이용하여 정수의 덧셈을 해 보자.

1 (양의 정수)+(양의 정수)



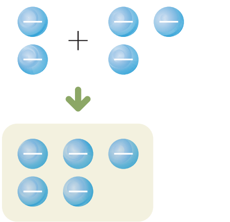
$(+2)+(+3)$은 0을 나타내는 점에서 오른쪽으로 2만큼 이동한 후 다시 오른쪽으로 3만큼 이동한 것이므로 결국 0을 나타내는 점에서 오른쪽으로 5만큼 이동한 것과 같다. 즉

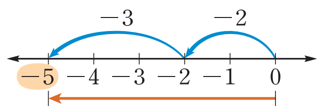


$$(+2)+(+3)=+5$$

이다.

2 (음의 정수)+(음의 정수)



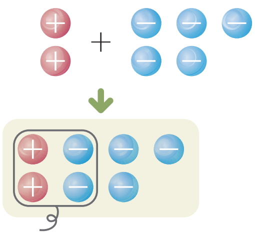


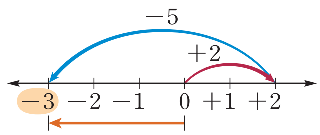
$(-2)+(-3)$은 0을 나타내는 점에서 왼쪽으로 2만큼 이동한 후 다시 왼쪽으로 3만큼 이동한 것이므로 결국 0을 나타내는 점에서 왼쪽으로 5만큼 이동한 것과 같다. 즉

$$(-2)+(-3)=-5$$

이다.

3 (양의 정수)+(음의 정수)



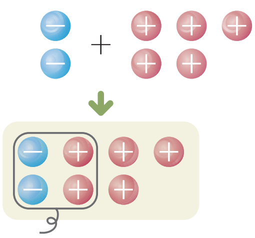


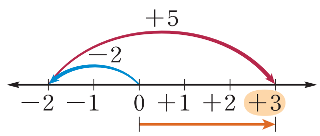
$(+2)+(-5)$는 0을 나타내는 점에서 오른쪽으로 2만큼 이동한 후 다시 왼쪽으로 5만큼 이동한 것이므로 결국 0을 나타내는 점에서 왼쪽으로 3만큼 이동한 것과 같다. 즉

$$(+2)+(-5)=-3$$

이다.

4 (음의 정수)+(양의 정수)





$(-2)+(+5)$는 0을 나타내는 점에서 왼쪽으로 2만큼 이동한 후 다시 오른쪽으로 5만큼 이동한 것이므로 결국 0을 나타내는 점에서 오른쪽으로 3만큼 이동한 것과 같다. 즉

$$(-2)+(+5)=+3$$

이다.

1, 2와 같이 부호가 같은 두 정수의 덧셈은 두 수의 절댓값의 합에 공통인 부호를 붙여서 계산한다.

공통인 부호

$$(-2)+(-3)=-5$$

절댓값의 합

또 3, 4와 같이 부호가 다른 두 정수의 덧셈은 두 수의 절댓값의 차에 절댓값이 큰 수의 부호를 붙여서 계산한다.

절댓값이 큰 수의 부호

$$(+2)+(-5)=-3$$

절댓값의 차

서로 다른 두 수의 차는 큰 수에서 작은 수를 뺀 값이다.

일반적으로 유리수의 덧셈도 정수의 덧셈과 마찬가지 방법으로 다음과 같이 계산한다.

유리수의 덧셈

❶ 부호가 같은 두 수의 덧셈은 두 수의 절댓값의 합에 공통인 부호를 붙여서 계산한다.

❷ 부호가 다른 두 수의 덧셈은 두 수의 절댓값의 차에 절댓값이 큰 수의 부호를 붙여서 계산한다.

참고 ① 어떤 수와 0의 합은 그 수 자신이다. 예를 들어 $(-4)+0=-4$이다.
② 절댓값은 같으나 부호가 반대인 두 수의 합은 0이다. 예를 들어 $(+3)+(-3)=0$이다.

예제 1 다음을 계산하시오.

(1) $(-4)+(+6)$ (2) $(+9)+0$

(3) $(+0.7)+(-1.9)$ (4) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$

풀이 (1) $(-4)+(+6)=+(6-4)=+2$

(2) $(+9)+0=+9$

(3) $(+0.7)+(-1.9)=-(1.9-0.7)=-1.2$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{3}{6}\right)+\left(-\frac{4}{6}\right)=-\left(\frac{3}{6}+\frac{4}{6}\right)=-\frac{7}{6}$

답 (1) $+2$ (2) $+9$ (3) -1.2 (4) $-\frac{7}{6}$

문제 1 다음을 계산하시오.

(1) $(+7)+(+1)$ (2) $(+11)+(-17)$

(3) $(-8)+(+8)$ (4) $(-12.5)+(-8.4)$

(5) $\left(-\frac{7}{4}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$ (6) $\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)$

덧셈의 교환법칙, 결합법칙

두 수 $+2$와 -7의 덧셈에서

$$(+2)+(-7)=-5,$$
$$(-7)+(+2)=-5$$

이다. 이와 같이 두 수의 순서를 바꾸어 더해도 그 결과는 같다. 이것을 덧셈의 **교환법칙**이라고 한다.

또 세 수 $+12$, -7, -8의 덧셈에서

$$\{(+12)+(-7)\}+(-8)=(+5)+(-8)=-3,$$
$$(+12)+\{(-7)+(-8)\}=(+12)+(-15)=-3$$

이다. 이와 같이 앞 또는 뒤의 두 수를 먼저 더한 후에 나머지 수를 더해도 그 결과는 같다. 이것을 덧셈의 **결합법칙**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

덧셈의 계산 법칙

세 수 a, b, c에 대하여

❶ 교환법칙 $a+b=b+a$

❷ 결합법칙 $(a+b)+c=a+(b+c)$

세 수의 덧셈에서 $(a+b)+c$와 $a+(b+c)$의 결과가 같으므로 이를 괄호 없이 $a+b+c$로 나타낼 수 있다.

세 개 이상의 수의 덧셈은 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 더하는 순서를 바꾸어 계산할 수 있다.

보기

$$\left(+\frac{1}{4}\right)+(-3)+\left(-\frac{5}{4}\right)$$
$$=(-3)+\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)$$
교환법칙
$$=(-3)+\left\{\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)\right\}$$
결합법칙
$$=(-3)+(-1)=-4$$

문제 2 **다음을 계산하시오.**

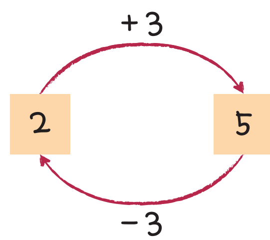
(1) $(-5)+(+8)+(+5)$

(2) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)$

정수와 유리수의 뺄셈

생각 톡

오른쪽 그림을 이용하여 다음과 같이 덧셈을 뺄셈으로 나타낼 수 있다.



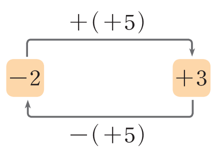
$2+3=5$

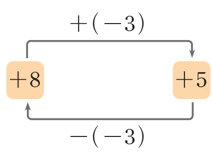
➔ $5-3=2$

탐구 위와 같은 방법으로 다음을 뺄셈으로 나타내어 보자.

$(+9)+(-2)=+7$

➔





자연수의 덧셈과 뺄셈 사이의 관계가 정수에서도 성립하므로 $(-2)+(+5)=+3$에서 $(+3)-(+5)=-2$임을 알 수 있다.

그런데 $(+3)+(-5)=-2$이므로

$$(+3)\underline{-(+5)}=(+3)\underline{+(-5)}$$

이다. 즉 $+3$에서 $+5$를 빼는 것은 $+3$에 -5를 더하는 것과 같다.

같은 방법으로 하면 $(+8)+(-3)=+5$에서 $(+5)-(-3)=+8$임을 알 수 있다. 그런데 $(+5)+(+3)=+8$이므로

$$(+5)\underline{-(-3)}=(+5)\underline{+(+3)}$$

이다. 즉 $+5$에서 -3을 빼는 것은 $+5$에 $+3$을 더하는 것과 같다.

이와 같이 두 정수의 뺄셈은 빼는 수의 부호를 바꾸어 더하는 것과 같다.

뺄셈을 덧셈으로

$$(+3)-(+5)=(+3)+(-5)$$

부호를 반대로

일반적으로 유리수의 뺄셈도 정수의 뺄셈과 마찬가지 방법으로 다음과 같이 계산한다.

유리수의 뺄셈

두 수의 뺄셈은 빼는 수의 부호를 바꾸어 더한다.

참고 어떤 수에서 0을 뺀 값은 그 수 자신이다. 예를 들어 $(-4)-0=-4$이다.

문제 3 다음을 계산하시오.

(1) $(+4)-(+7)$

(2) $(-9)-(+8)$

(3) $(-5)-(+5)$

(4) $(+3.7)-(-2.1)$

(5) $\left(-\frac{9}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)$

(6) $\left(+\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{2}{5}\right)$

덧셈과 뺄셈이 혼합된 식의 계산은 먼저 뺄셈을 덧셈으로 고친 후 덧셈의 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 순서를 바꾸어 계산하면 편리하다.

예제 2 다음을 계산하시오.

(1) $(-6)-(-9)+(-11)$

(2) $\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)$

풀이 (1) $(-6)-(-9)+(-11)=(-6)+(+9)+(-11)$
$=(+3)+(-11)=-8$

(2) $\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)$
$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}$
$=\left(-\frac{1}{2}\right)+(-3)=-\frac{7}{2}$

답 (1) -8 (2) $-\frac{7}{2}$

문제 4 다음을 계산하시오.

(1) $(+12)-(+5)-(-3)$

(2) $\left(+\frac{3}{5}\right)-\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{7}{5}\right)$

$-7+5-1$과 같이 덧셈과 뺄셈을 괄호가 없는 식으로 나타낼 수 있다. 이때 괄호가 없는 식은 괄호가 있는 식으로 고쳐서 계산할 수 있다.

예제 3 $-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}$를 계산하시오.

풀이 $-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)-\left(+\frac{5}{2}\right)$
$=\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)$
$=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)=-3$

답 -3

문제 5 다음을 계산하시오.

(1) $-10+6-7$ (2) $-6+1-11+9$

(3) $2.5-4.3+1.2$ (4) $\frac{7}{6}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}$

적용하기 다음 규칙에 따라 한라에서 백두까지 찾아가 보자.

- 한라에서 출발하여 상하좌우, 대각선 방향으로 한 칸씩 이동할 수 있다.
- 현재 칸의 수보다 3만큼 크거나 5만큼 작은 수가 적힌 칸으로 이동할 수 있다.

도착										
백두	0	6	-3	-2	1	-6	-4	7	3	
	-3	-1	-1	-7	3	-9	9	-3	0	
	-8	-6	0	-4	8	-5	0	-2	-6	
	-2	6	2	5	-4	-2	1	-1	-2	출발
	7	0	-1	-4	-7	-10	8	-4	1	한라

확인하기

1 다음을 계산하시오.

(1) $(-7)+(+5)$ (2) $(+8)-(-2)$

(3) $(-3.6)-(+2.7)+(-1.4)$ (4) $\left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{4}{5}\right)$

2 다음을 계산하시오.

(1) $-3-9+5-2$ (2) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{7}{4}$

사고력+ 다음에서 계산 결과가 항상 양수인 것을 찾으시오.

(1) (양수)$-$(양수) (2) (양수)$-$(음수)

(3) (음수)$-$(양수) (4) (음수)$-$(음수)

4 정수와 유리수의 곱셈, 나눗셈

정수와 유리수의 곱셈, 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

정수와 유리수의 곱셈

생각 톡

오른쪽은 양의 정수 5에 3부터 -2까지 1씩 작아지는 수를 곱한 것이다.

탐구 곱한 결과에서 규칙을 찾아 말하고 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$5 \times 3 = 15$$
$$5 \times 2 = 10$$
$$5 \times 1 = 5$$
$$5 \times 0 = 0$$
$$5 \times (-1) = \square$$
$$5 \times (-2) = \square$$

다음과 같이 양의 정수 5에 1씩 작아지는 수를 곱하거나 1씩 작아지는 수에 양의 정수 5를 곱하면 그 결과는 5씩 작아짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} (+5)\times(+2)&=+10 \\ (+5)\times(+1)&=+5 \\ (+5)\times 0&=0 \\ (+5)\times(-1)&=-5 \\ (+5)\times(-2)&=-10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (+2)\times(+5)&=+10 \\ (+1)\times(+5)&=+5 \\ 0\times(+5)&=0 \\ (-1)\times(+5)&=-5 \\ (-2)\times(+5)&=-10 \end{aligned}$$

이상에서 두 양의 정수의 곱은 두 수의 절댓값의 곱에 양의 부호 +를 붙인 것과 같고, 양의 정수와 음의 정수의 곱 또는 음의 정수와 양의 정수의 곱은 두 수의 절댓값의 곱에 음의 부호 $-$를 붙인 것과 같음을 알 수 있다.

음의 부호

$$(+5)\times(-2)=-10$$

절댓값의 곱

음의 부호

$$(-2)\times(+5)=-10$$

절댓값의 곱

한편 오른쪽과 같이 음의 정수 -5에 1씩 작아지는 수를 곱하면 그 결과는 5씩 커짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} (-5)\times(+2)&=-10 \\ (-5)\times(+1)&=-5 \\ (-5)\times 0&=0 \\ (-5)\times(-1)&=+5 \\ (-5)\times(-2)&=+10 \end{aligned}$$

이상에서 두 음의 정수의 곱은 두 수의 절댓값의 곱에 양의 부호 $+$를 붙인 것과 같음을 알 수 있다.

양의 부호

$(-5)\times(-2)=+10$

절댓값의 곱

일반적으로 유리수의 곱셈도 정수의 곱셈과 마찬가지 방법으로 다음과 같이 계산한다.

$(+)\times(+)$, $(-)\times(-)$ → $+$

$(+)\times(-)$, $(-)\times(+)$ → $-$

유리수의 곱셈

❶ 부호가 같은 두 수의 곱셈은 두 수의 절댓값의 곱에 양의 부호 $+$를 붙여서 계산한다.

❷ 부호가 다른 두 수의 곱셈은 두 수의 절댓값의 곱에 음의 부호 $-$를 붙여서 계산한다.

참고 어떤 수와 0의 곱은 0이다.

예제 1 **다음을 계산하시오.**

(1) $(+2)\times(+7)$

(2) $(-3)\times(-5)$

(3) $(-2.5)\times(+4)$

(4) $\left(+\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{4}{9}\right)$

풀이 (1) $(+2)\times(+7)=+(2\times7)=+14$

(2) $(-3)\times(-5)=+(3\times5)=+15$

(3) $(-2.5)\times(+4)=-(2.5\times4)=-10$

(4) $\left(+\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{4}{9}\right)=-\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{9}\right)=-\frac{2}{3}$

답 (1) $+14$ (2) $+15$ (3) -10 (4) $-\frac{2}{3}$

문제 1 **다음을 계산하시오.**

(1) $(+5)\times(-8)$

(2) $(-2.1)\times(+3)$

(3) $(+4)\times(+6.5)$

(4) $\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{15}{2}\right)$

(5) $\left(-\frac{4}{9}\right)\times0$

(6) $(-3.2)\times\left(+\frac{5}{4}\right)$

곱셈의 교환법칙, 결합법칙

두 수 $+6$과 $-\frac{1}{2}$의 곱셈에서

$$(+6)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3,$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\times(+6)=-3$$

이다. 이와 같이 두 수의 순서를 바꾸어 곱해도 그 결과는 같다. 이것을 곱셈의 **교환법칙**이라고 한다.

또 세 수 $+4$, $-\frac{1}{6}$, -3의 곱셈에서

$$\left\{(+4)\times\left(-\frac{1}{6}\right)\right\}\times(-3)=\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-3)=+2,$$

$$(+4)\times\left\{\left(-\frac{1}{6}\right)\times(-3)\right\}=(+4)\times\left(+\frac{1}{2}\right)=+2$$

이다. 이와 같이 앞 또는 뒤의 두 수를 먼저 곱한 후에 나머지 수를 곱해도 그 결과는 같다. 이것을 곱셈의 **결합법칙**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **곱셈의 계산 법칙**
> 세 수 a, b, c에 대하여
> ❶ 교환법칙 $a\times b=b\times a$
> ❷ 결합법칙 $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

세 수의 곱셈에서 $(a\times b)\times c$와 $a\times(b\times c)$의 결과가 같으므로 이를 괄호 없이 $a\times b\times c$로 나타낼 수 있다.

세 개 이상의 수의 곱셈은 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 곱하는 순서를 바꾸어 계산할 수 있다.

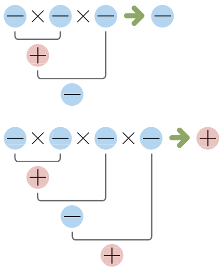
보기

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-2)\times(+6) \\
&=(-2)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times(+6) && \text{교환법칙} \\
&=(-2)\times\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)\times(+6)\right\} && \text{결합법칙} \\
&=(-2)\times(-2)=+4
\end{aligned}$$

문제 2 **다음을 계산하시오.**

(1) $(-2)\times(+3.7)\times(+5)$

(2) $(+4)\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times(-2.5)$



0이 아닌 여러 개의 수의 곱셈에서는 곱해지는 음수의 개수에 따라 부호가 결정된다. 이때 곱의 부호는 음수가 홀수 개이면 $-$이고, 하나도 없거나 짝수 개이면 $+$이다.

따라서 여러 개의 수의 곱셈에서는 먼저 곱의 부호를 정하고, 각 수의 절댓값의 곱에 그 부호를 붙여서 계산한다.

또 거듭제곱이 섞여 있을 때에는 보통 거듭제곱을 먼저 계산한다.

보기 ❶ $(-3)\times(+2)\times(-7)=+(3\times2\times7)=+42$

❷ $(-6)\times\left(+\frac{14}{3}\right)\times(-5)\times\left(-\frac{1}{7}\right)=-\left(6\times\frac{14}{3}\times5\times\frac{1}{7}\right)=-20$

❸ $(+3)\times(-2)^3=(+3)\times\{(-2)\times(-2)\times(-2)\}$
$=(+3)\times(-8)=-24$

문제 3 **다음을 계산하시오.**

(1) $(-0.2)\times(+30)\times(+1.4)$

(2) $(-2)\times\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{9}{2}\right)\times(-1)$

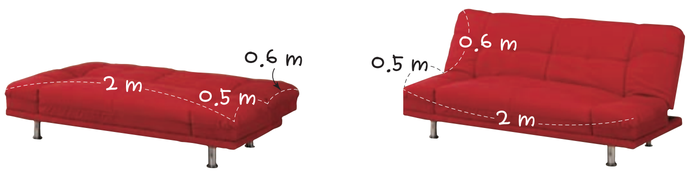
(3) $(-2)\times(-5)^2$

(4) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3\times(-8)$

분배법칙

생각톡

다음과 같이 소파로도 사용할 수 있는 접이식 침대가 있다.



탐구 ① 접이식 침대를 침대로 사용할 때, 가로의 길이와 세로의 길이를 이용하여 접이식 침대의 넓이를 구하는 식을 세워 보자.

탐구 ② 접이식 침대를 소파로 사용할 때, 의자 부분과 등받이 부분의 넓이를 구하는 식을 각각 세워 보자.

위의 생각톡에서 접이식 침대의 넓이를 구하는 식을 각각 계산하면 다음과 같이 결과가 같다.

$2\times(0.5+0.6)=2\times1.1=2.2\,(\mathrm{m}^2)$,

$2\times0.5+2\times0.6=1+1.2=2.2\,(\mathrm{m}^2)$

이와 같이 두 수의 합에 어떤 수를 곱한 것은 두 수에 각각 어떤 수를 곱하여 더한 것과 같다. 이것을 덧셈에 대한 곱셈의 **분배법칙**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

분배법칙

세 수 a, b, c에 대하여

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$
$$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$$

보기 ① $12\times\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)=12\times\left(-\frac{1}{3}\right)+12\times\frac{3}{4}=-4+9=5$

② $\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-6)+\frac{5}{4}\times(-6)=\left(-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)\times(-6)$

$=\frac{1}{2}\times(-6)=-3$

문제 4 **분배법칙을 이용하여 다음을 계산하시오.**

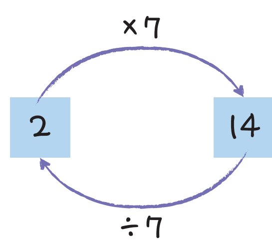
(1) $15\times\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)$

(2) $36\times(-4.7)+64\times(-4.7)$

정수와 유리수의 나눗셈

생각톡

오른쪽 그림을 이용하여 다음과 같이 곱셈을 나눗셈으로 나타낼 수 있다.



$2\times7=14$

➔ $14\div7=2$

탐구 위와 같은 방법으로 다음을 나눗셈으로 나타내어 보자.

$(-5)\times(+2)=-10$

➔

자연수의 곱셈과 나눗셈 사이의 관계가 정수에서도 성립하므로 다음과 같이 곱셈을 나눗셈으로 나타낼 수 있다.

$$(+5)\times(+3)=+15 \rightarrow (+15)\div(+3)=+5$$
$$(+5)\times(-3)=-15 \rightarrow (-15)\div(-3)=+5$$
$$(-5)\times(+3)=-15 \rightarrow (-15)\div(+3)=-5$$
$$(-5)\times(-3)=+15 \rightarrow (+15)\div(-3)=-5$$

어떤 수를 0으로 나누는 것은 생각하지 않는다.

이상에서 부호가 같은 두 정수의 나눗셈은 두 수의 절댓값의 나눗셈의 몫에 양의 부호 $+$를 붙인 것과 같음을 알 수 있다.

양의 부호

$$(-15)\div(-3)=+5$$

절댓값의 나눗셈의 몫

또 부호가 다른 두 정수의 나눗셈은 두 수의 절댓값의 나눗셈의 몫에 음의 부호 $-$를 붙인 것과 같음을 알 수 있다.

음의 부호

$$(+15)\div(-3)=-5$$

절댓값의 나눗셈의 몫

일반적으로 유리수의 나눗셈도 정수의 나눗셈과 마찬가지 방법으로 다음과 같이 계산한다.

$\left.\begin{matrix}(+)\div(+)\\(-)\div(-)\end{matrix}\right]\rightarrow(+)$

$\left.\begin{matrix}(+)\div(-)\\(-)\div(+)\end{matrix}\right]\rightarrow(-)$

유리수의 나눗셈

❶ 부호가 같은 두 수의 나눗셈은 두 수의 절댓값의 나눗셈의 몫에 양의 부호 $+$를 붙여서 계산한다.

❷ 부호가 다른 두 수의 나눗셈은 두 수의 절댓값의 나눗셈의 몫에 음의 부호 $-$를 붙여서 계산한다.

참고 0을 0이 아닌 어떤 수로 나눈 값은 0이다. 예를 들어 $0\div(-3)=0$이다.

문제 5 **다음을 계산하시오.**

(1) $(+6)\div(-2)$　　(2) $(-14)\div(-7)$

(3) $(+3.8)\div(+0.2)$　　(4) $(+2.4)\div(-8)$

(5) $(-5.6)\div(+0.7)$　　(6) $0\div(-6.2)$

0의 역수는 생각하지 않는다.

두 수의 곱이 1일 때, 한 수를 다른 수의 **역수**라고 한다.

예를 들어 $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=1$이므로 $-\frac{3}{4}$은 $-\frac{4}{3}$의 역수이고 $-\frac{4}{3}$는 $-\frac{3}{4}$의 역수이다.

문제 6 **다음 수의 역수를 구하시오.**

(1) $\frac{7}{4}$　　(2) 5　　(3) $-\frac{11}{8}$　　(4) -0.9

초등학교에서 분수의 나눗셈은

$$5\div\frac{2}{3}=5\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$$

와 같이 나누는 수의 역수를 곱하여 계산하였다.

유리수의 나눗셈도 역수를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

곱셈으로 고친다.

$$(+6)\div\left(-\frac{3}{5}\right)=(+6)\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-\left(6\times\frac{5}{3}\right)=-10$$

역수로 바꾼다.

예제 2 **다음을 계산하시오.**

(1) $\left(+\frac{9}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)$　　(2) $\left(-\frac{15}{4}\right)\div\left(-\frac{9}{8}\right)$

풀이 (1) $\left(+\frac{9}{2}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(+\frac{9}{2}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=-\left(\frac{9}{2}\times\frac{4}{3}\right)=-6$

(2) $\left(-\frac{15}{4}\right)\div\left(-\frac{9}{8}\right)=\left(-\frac{15}{4}\right)\times\left(-\frac{8}{9}\right)=+\left(\frac{15}{4}\times\frac{8}{9}\right)=+\frac{10}{3}$

답 (1) -6　(2) $+\frac{10}{3}$

문제 7 **다음을 계산하시오.**

(1) $\left(-\frac{4}{3}\right)\div\left(-\frac{8}{5}\right)$　　(2) $\left(-\frac{7}{20}\right)\div(+1.4)$

덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞인 식의 계산

덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞인 식을 계산할 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

❶ 거듭제곱이 있으면 거듭제곱을 먼저 계산한다.

❷ 괄호가 있는 식은 괄호 안을 먼저 계산한다. 이때 소괄호 ( ), 중괄호 { }, 대괄호 [ ]의 순서로 계산한다.

❸ 곱셈과 나눗셈을 먼저 계산한 후 덧셈과 뺄셈을 계산한다.

예제 3 $10-\left\{-4-2\div\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\}$을 계산하시오.

풀이

$$\begin{aligned}10-\left\{-4-2\div\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\}&=10-\left\{-4-2\div\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}\\&=10-\{-4-2\times(-8)\}\\&=10-(-4+16)\\&=10-12=-2\end{aligned}$$

답 -2

문제 8 다음을 계산하시오.

(1) $8-(-2)^2\times\{15-(2-7)\}$

(2) $\{-6-(3+5)\}\div\left(-\frac{7}{2}\right)^2$

확인하기

1 다음을 계산하시오.

(1) $(-1)\times(-2)\times(-3)$

(2) $\left(-\frac{7}{6}\right)\div\left(-\frac{5}{4}\right)\times\frac{3}{14}$

2 다음을 계산하시오.

(1) $\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\div\left(-\frac{12}{5}\right)$

(2) $(-6)^3\div4-(-15)\div(-3)$

수학 역량 플러스

수직선으로 보는 곱셈

추론 의사소통

수직선을 이용하여 유리수의 곱셈을 설명할 수 있다.

예를 들어 현재 시각을 기준으로 2초 후를 $+2$로 나타내면 2초 전은 -2로 나타낼 수 있고, 오른쪽으로 초속 2로 움직이는 것을 $+2$로 나타내면 왼쪽으로 초속 2로 움직이는 것은 -2로 나타낼 수 있다.

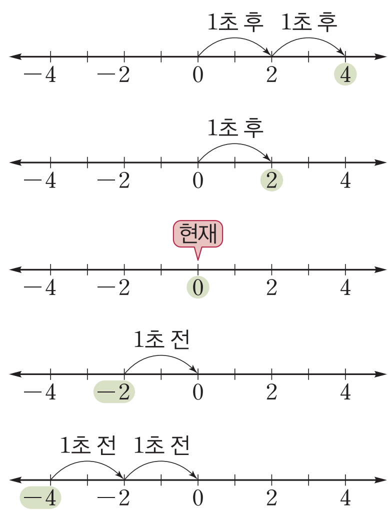
$+2$	-2
2초 후 오른쪽으로 초속 2	2초 전 왼쪽으로 초속 2

따라서 현재 위치를 0이라고 하면 오른쪽으로 초속 2로 움직일 때, 3초 후의 위치는

$$(+2)\times(+3)$$

과 같이 정수의 곱셈으로 나타낼 수 있다.

현재 위치가 0이고 오른쪽으로 초속 2로 움직일 때, 시간에 따른 위치를 수직선 위에 표시하고 이를 정수의 곱셈으로 나타내면 다음과 같다.



2초 후의 위치 ➔ $(+2)\times(+2)=+4$

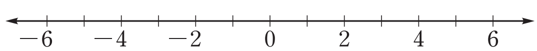
1초 후의 위치 ➔ $(+2)\times(+1)=+2$

현재 위치 ➔ $(+2)\times\ 0\ =0$

1초 전의 위치 ➔ $(+2)\times(-1)=-2$

2초 전의 위치 ➔ $(+2)\times(-2)=-4$

활동 1 현재 위치가 0이고 오른쪽으로 초속 2로 움직일 때, 3초 전의 위치를 다음 수직선 위에 표시하고 이를 정수의 곱셈으로 나타내어 보자.



➔ ______________

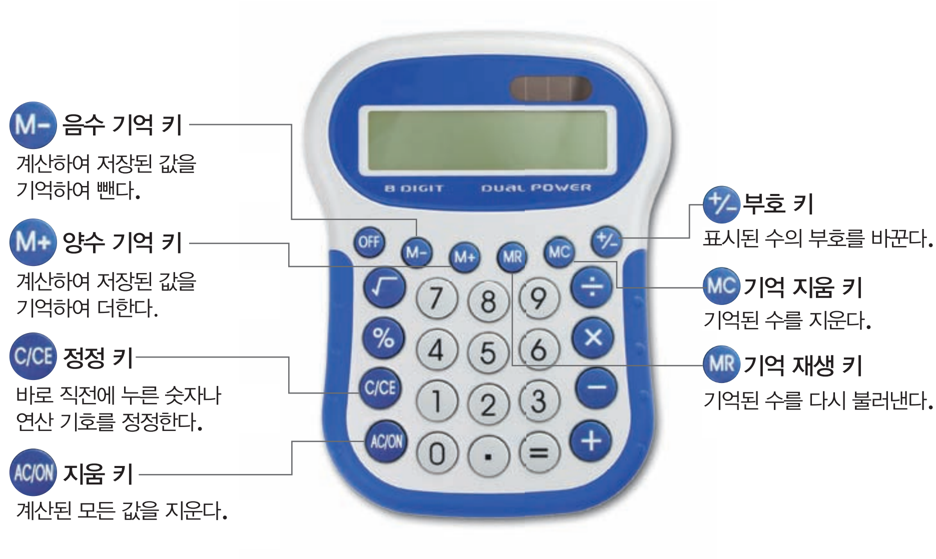
활동 2 위의 방법을 이용하여 $(-2)\times(-3)=+6$을 설명해 보자.

공학 도구 활용

계산기를 이용한 유리수의 계산

정보 처리 문제 해결

계산기에는 다음과 같이 다양한 기능의 키가 있어서 간단한 사칙계산뿐만 아니라 복잡한 계산도 할 수 있다.



활동 1 계산기를 이용하여 다음 식을 계산하고, 각 단계별 계산 결과를 써넣어 보자.

식	키 조작	계산 결과
$(36+108)\div(59-27)$ (① $59-27$, ② 전체)	① 5 9 − 2 7 M+ ② 3 6 + 1 0 8 ÷ MR =	______ ______
$57\times(-1.2)-35.4\div3$ (① $57\times(-1.2)$, ② $35.4\div3$, ③ 전체)	① 5 7 × 1 . 2 +/− M+ ② 3 5 . 4 ÷ 3 M− ③ MR	______ ______ ______

활동 2 계산기를 이용하여 다음 식을 계산해 보자.

(1) $(-21)\times135\div(-39+111)$

(2) $2.7\times15-256\div8+48\times7.4$

정답 및 풀이 280쪽

중단원 마무리

I-2 정수와 유리수

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 정수와 유리수

29쪽

(1) 자연수에 양의 부호를 붙인 수인 양의 정수와 음의 부호를 붙인 수인 음의 정수, 그리고 0을 통틀어 $\boxed{\qquad}$라고 한다.

(2) 분모, 분자가 모두 자연수인 분수에 양의 부호를 붙인 수인 $\boxed{\qquad}$와 음의 부호를 붙인 수인 $\boxed{\qquad}$, 그리고 0을 통틀어 $\boxed{\qquad}$라고 한다.

(3) 직선 위에 기준이 되는 점을 정하여 그 점에 0을 대응시키고, 그 점의 오른쪽에 양수를, 왼쪽에 음수를 각각 대응시킨 직선을 $\boxed{\qquad}$이라고 한다.

❷ 수의 대소 관계

33쪽

(1) 수직선 위에서 0을 나타내는 점과 어떤 수를 나타내는 점 사이의 거리를 그 수의 $\boxed{\qquad}$이라고 한다.

(2) 양수끼리는 절댓값이 큰 수가 크고, 음수끼리는 절댓값이 큰 수가 $\boxed{\qquad}$.

❸ 정수와 유리수의 덧셈, 뺄셈

37쪽

(1) 부호가 같은 두 수의 덧셈은 두 수의 절댓값의 합에 공통인 부호를 붙이고, 부호가 다른 두 수의 덧셈은 두 수의 절댓값의 $\boxed{\qquad}$에 절댓값이 큰 수의 부호를 붙인다.

(2) 두 수의 뺄셈은 빼는 수의 부호를 바꾸어 더한다.

❹ 정수와 유리수의 곱셈, 나눗셈

44쪽

(1) 부호가 같은 두 수의 곱셈은 두 수의 절댓값의 곱에 양의 부호를 붙이고, 부호가 다른 두 수의 곱셈은 두 수의 절댓값의 곱에 $\boxed{\qquad}$를 붙인다.

(2) 두 수의 나눗셈은 나누는 수의 $\boxed{\qquad}$를 곱한다.

표준 문제

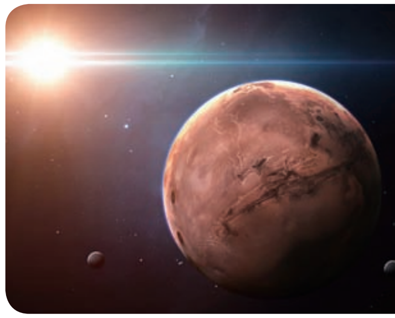
01 다음 수 중에서 양수의 개수와 음의 정수의 개수를 각각 구하시오.

$-3 \qquad +\frac{5}{4} \qquad 0 \qquad -\frac{6}{3} \qquad 0.7 \qquad 102 \qquad -2.8$

02 $-\frac{8}{3} < a \le 5$를 만족시키는 정수 a를 모두 구하시오.

03 절댓값이 7인 양수와 절댓값이 5인 음수의 합을 구하시오.

창의·융합 **04** 하루 중 최고 기온과 최저 기온의 차를 일교차라고 한다. 어느 날 화성의 최고 기온이 25 °C, 최저 기온이 -55 °C일 때, 이날 화성의 일교차를 구하시오.



서술형 **05** 어떤 유리수에서 $-\frac{3}{4}$을 빼야 할 것을 잘못하여 더했더니 $\frac{7}{4}$이 되었다. 바르게 계산한 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

서술형 **06** 다음 수에 대하여 물음에 답하시오.

2	-2.5	0	$-\frac{13}{4}$	$+0.8$

(1) 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구하시오.
(2) 절댓값이 가장 큰 수와 절댓값이 가장 작은 수의 합을 구하시오.

07 $-\frac{5}{8}$의 역수와 $\frac{3}{4}$의 역수의 합을 구하시오.

08 다음을 계산하시오.

(1) $(-3)^2 \times 2 - (-2)^3 \div (-4)$

(2) $\frac{1}{4} - \frac{3}{10} \div \left\{1 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{5}\right)\right\}$

도전 문제

추론 **09** 두 유리수 a, b가 $a>0$, $b<0$, $a+b<0$을 만족시킬 때, 다음에서 세 번째로 작은 수를 구하시오.

a $\quad b$ $\quad -a$ $\quad -b$ $\quad a-b$ $\quad b-a$

10 다음 빈칸에 들어갈 세 수의 곱을 구하시오.

(가) $\square$는 4보다 -5만큼 작은 수이다.

(나) $\square$는 -1보다 $\frac{2}{3}$만큼 작은 수이다.

(다) $\square$는 $\frac{4}{5}$보다 $-\frac{3}{4}$만큼 큰 수이다.

서술형 **11** 다음에서 서로 다른 세 수를 골라 곱한 값 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

$-\frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{6}$ $\quad -\frac{2}{7}$ $\quad \frac{7}{5}$

대단원 마무리

정답 및 풀이 280쪽

01 다음에서 합성수의 개수를 구하시오.

1	2	18	39	43
51	59	61	73	81

02 다음 중에서 두 수가 서로소인 것은?

① 14, 35 ② 15, 39 ③ 25, 41
④ 49, 70 ⑤ 57, 93

03 두 수 $2^3\times3^a\times7$과 $2^b\times3^2\times c$의 최대공약수가 $2^2\times3^2$이고 최소공배수가 $2^3\times3^4\times5\times7$일 때, 세 자연수 a, b, c의 값을 구하시오.
(단, c는 소수이다.)

04 세 수 $2^2\times3^2\times5$, $2\times3^3\times5^2$, $3^2\times5^3$의 공약수의 개수를 구하시오.

05 바나나 54개, 딸기 80개, 자두 29개를 동아리 회원들에게 똑같이 나누어 주려고 했더니 바나나는 남거나 모자라지 않았고 딸기는 1개가 부족하였고 자두는 2개가 남았다. 동아리 회원은 최대 몇 명인지 구하시오.

06 가로의 길이가 18 cm, 세로의 길이가 10 cm인 직사각형 모양의 그림을 빈틈없이 이어 붙여 되도록 작은 정사각형 모양의 작품을 만들려고 한다. 이때 직사각형 모양의 그림이 몇 개 필요한지 구하시오.

07 다음 중에서 옳지 않은 것은?

① 모든 자연수는 정수이다.
② 모든 정수는 유리수이다.
③ 양의 정수가 아닌 정수는 음의 정수이다.
④ 자연수에 음의 부호를 붙인 수는 음의 정수이다.
⑤ 수직선에서 오른쪽에 있는 수일수록 크다.

08 절댓값이 같고 부호가 반대인 두 수를 수직선 위에 나타내었을 때, 두 점 사이의 거리가 $\frac{8}{5}$이었다. 이 두 수를 구하시오.

09 다음 중에서 대소 관계가 옳은 것은?

① $0.3<-0.2$
② $-3>-2.5$
③ $|-4|>|-5|$
④ $-\frac{5}{6}<-\frac{4}{5}$
⑤ $\left(-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{3}$

10 오른쪽에서 가로, 세로, 대각선 방향에 놓인 세 수의 합이 모두 같아지도록 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

-4		0
	-1	
-2		

11 다음 중에서 계산 결과가 나머지 넷과 다른 하나는?

① $(-5)+(-2)-(-9)$
② $\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{9}{4}\right)$
③ $\left(-\frac{1}{7}\right)\times(-14)$
④ $\left(-\frac{5}{2}\right)\div\left(-\frac{5}{4}\right)$
⑤ $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\div\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

12 다음을 계산하시오.

$$2\times(-1)^3-\frac{9}{2}\div\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right\}$$

서술형

13 소인수분해를 이용하여 196의 약수를 모두 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

14 두 자연수의 곱이 2016이고 최대공약수가 12일 때, 두 수의 최소공배수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

15 절댓값이 3인 정수와 절댓값이 8인 정수의 합 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 태희와 지수가 계단에서 가위바위보를 하여 이기면 3칸을 올라가고, 지면 1칸을 내려가기로 하였다. 같은 위치에서 시작하여 가위바위보를 6번 한 결과 태희가 4번 이기고 2번 졌을 때, 두 사람이 몇 칸 떨어져 있는지 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, 계단의 칸은 오르내리기에 충분하다.)

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 자연수를 소인수분해할 수 있다.			
❷ 소인수분해를 이용하여 최대공약수와 최소공배수를 구할 수 있다.			
❸ 정수와 유리수의 개념을 이해하고 대소 관계를 알 수 있다.			
❹ 유리수의 사칙계산을 할 수 있다.			

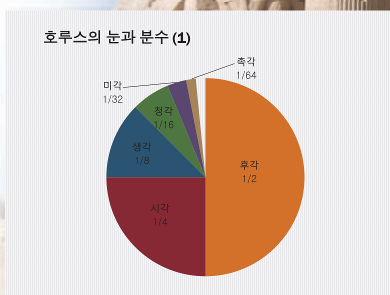
보충 계획

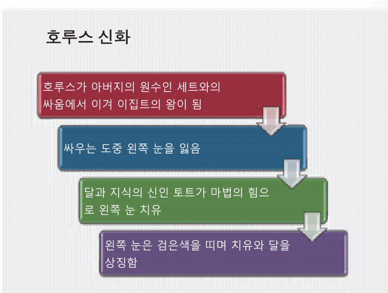
부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

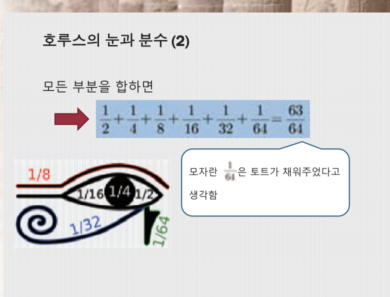
6 창의·융합 프로젝트

이야기 속의 유리수

유리수와 관련된 이야기를 찾아 발표하는 과제에서 서윤이는 ‘호루스의 눈’ 이야기에 대하여 다음과 같은 발표 자료를 만들었다.







과제 1 유리수와 관련된 이야기를 찾아 발표 자료를 만들어 보자.

(출처: 계영희, 『명화와 함께 떠나는 수학사 여행』)

Math X Movie

세상 속 수학

골트바흐의 편지

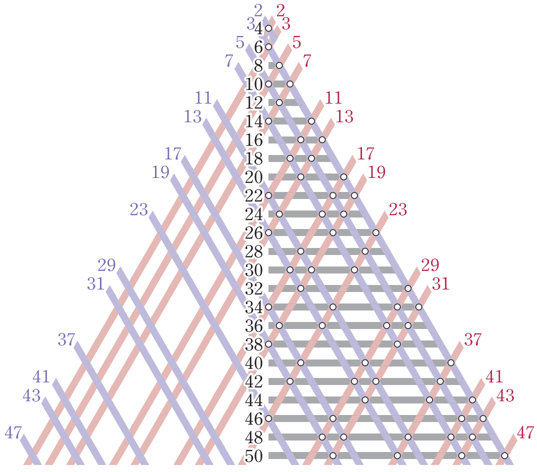
밀실에 갇힌 4명의 수학자가 문제를 해결하면서 동시에 범인을 추리하는 내용을 다룬 영화가 있다. 이 영화 속에 등장하는 4명의 수학자의 가명은 힐베르트, 갈루아, 올리바, 파스칼인데, 이 중 갈루아가 자신이 '골트바흐의 추측'을 증명했다고 주장하면서 영화가 시작된다.

이 영화의 중요 소재인 '골트바흐의 추측'은 독일 수학자 골트바흐(Goldbach, C., 1690~1764)가 오일러(Euler, L., 1707~1783)에게 보낸 편지에 적혀 있던 것에서 변형된 것으로, 그 내용은 다음과 같다.

> 2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 표현할 수 있다.

예를 들어 $12=5+7$, $24=11+13$과 같이 짝수는 두 소수의 합으로 표현할 수 있다.

다음은 2보다 큰 50 이하의 모든 짝수는 두 소수의 합으로 표현할 수 있음을 나타내는 그림이다. 이 그림에서는 하나의 짝수를 두 소수의 합으로 표현하는 방법이 몇 가지인지도 확인할 수 있다. 예를 들어 30은 $7+23$, $11+19$, $13+17$의 3가지로 표현할 수 있다.



(출처: 박경미, 『박경미의 수학 콘서트』)

진로 탐색 **시나리오 작가** | 영화 및 드라마 또는 애니메이션을 제작하기 위하여 창작하거나 문학 작품을 각색하여 대본을 쓴다.

Ⅱ 방정식

배운 내용 — 이 단원의 내용 — 배울 내용

초 3~4
- 식으로 나타내기

중 1
- 유리수의 사칙계산

1 문자와 식
- 문자의 사용
- 일차식의 계산

2 일차방정식
- 방정식과 그 해
- 일차방정식

중 2
- 식의 계산
- 일차부등식
- 연립일차방정식

중 3
- 다항식의 곱셈
- 다항식의 인수분해
- 이차방정식

그림을 사용하여 정보를 나타내듯이 **문자를 사용**하여 수량 사이의 관계를 나타낼 수 있다. 이 단원에서는 문자를 사용하여 식으로 나타내고 문제를 해결하는 방법을 알아본다.

1 문자와 식

준비 학습

식으로 나타내기

1 다음 문장을 식으로 나타내시오.

(1) 500원짜리 지우개 ○개와 700원짜리 연필 ◇개의 가격

(2) □의 21배와 △의 3배의 합

유리수의 사칙계산

2 다음을 계산하시오.

(1) $12-3\times2$

(2) $(-2)^2+\frac{1}{5}\times20$

(3) $-5-\frac{1}{2}\div0.5\times3$

(4) $\left(\frac{3}{4}+0.25\right)\div\frac{1}{2}+(-3)^2$

1 문자의 사용

다양한 상황을 문자를 사용한 식으로 나타낼 수 있고, 식의 값을 구할 수 있다.

문자를 사용한 식

생각톡

녹색 제품이란 같은 용도의 다른 상품에 비해 환경 오염의 발생을 최소화한 제품으로 인증 마크가 부착되어 있다. 녹색 제품으로 인증된 친환경 세제를 한 개 구매할 때마다 300점의 포인트가 적립된다고 한다.

다음은 친환경 세제를 구매한 개수에 따라 적립되는 포인트를 영하와 도훈이가 각각 말과 기호로 설명한 것이다.

구매한 세제의 개수에 300점을 곱하면 돼.

□를 사용하면 (300×□)점으로 나타낼 수 있어.

탐구 위와 같이 수량 사이의 관계를 말로 설명하는 것과 기호를 사용하여 설명하는 것의 특징을 비교해 보자.

위의 생각톡에서 구매한 세제의 개수에 따라 적립되는 포인트는

$$300\times(\text{개수})\ (\text{점})$$

으로 나타낼 수 있다. 이때 개수 대신 문자 x를 사용하면

$$(300\times x)\text{점}$$

으로 나타낼 수 있다.

문자 x 대신 a, p, y 등 다른 문자를 사용할 수도 있다.

이와 같이 구체적인 값이 주어지지 않거나 일반적인 수량을 나타낼 때, 문자를 사용하면 수량 사이의 관계를 간단히 나타낼 수 있다.

보기 ❶ 어떤 수 k의 2배보다 3만큼 큰 수는 $2\times k+3$

❷ 가로, 세로의 길이가 각각 a cm, b cm인 직사각형의 넓이는

$(a\times b)\ \text{cm}^2$

문제 1 다음을 문자를 사용한 식으로 나타내시오.

(1) 전체 학생 수가 300이고 여학생 수가 a일 때, 남학생 수

(2) 20장의 값이 k원인 우표 한 장의 값

(3) 밑변의 길이가 a cm, 높이가 h cm인 삼각형의 넓이

곱셈 기호와 나눗셈 기호의 생략

직육면체의 부피는

$$(\text{가로의 길이})\times(\text{세로의 길이})\times(\text{높이})$$

이므로 오른쪽 선물 상자의 부피는

$$a\times3\times b$$

이다. 이때 수를 문자 앞에 쓰고 곱셈 기호 ×를 생략하여 이 식을 $3ab$와 같이 간단히 나타낼 수 있다.

일반적으로 문자를 사용한 식에서 곱셈 기호 ×를 생략할 때에는 다음과 같이 간단히 나타낸다.

곱셈 기호의 생략

❶ 수와 문자의 곱에서는 곱셈 기호를 생략하고 수를 문자 앞에 쓴다.

$a\times2=2a,\quad x\times(-3)=-3x$

❷ 문자와 문자의 곱에서는 곱셈 기호를 생략하고 보통 알파벳 순서로 쓴다.

$b\times a=ab,\quad y\times x\times z=xyz$

❸ 같은 문자의 곱은 거듭제곱으로 나타낸다.

$x\times x\times x=x^3,\quad 2\times a\times a\times a\times b\times b=2a^3b^2$

$0.1\times a$는 $0.a$로 쓰지 않고 $0.1a$로 쓴다.

$-(-2)=(-1)\times(-2)$
$=2$

참고 ① 1과 문자의 곱에서 1은 생략한다.

$1\times a=a$

② $(-1)\times2=-2$와 마찬가지로 -1과 문자의 곱에서 1은 생략하고 음의 부호 $-$만 문자 앞에 쓴다.

$(-1)\times a=-a$

③ $\frac{1}{2}\times a$는 $\frac{1}{2}a$ 또는 $\frac{a}{2}$로 나타낸다.

④ 괄호가 있는 식과 수의 곱에서는 곱셈 기호를 생략하고 수를 괄호 앞에 쓴다.

$(x-1)\times3=3(x-1)$

문제 2 다음 식을 곱셈 기호를 생략하여 나타내시오.

(1) $x\times0.5\times y$

(2) $a\times3\times b\times a$

(3) $(x+2)\times(-1)$

(4) $a\times(b+c)\times\frac{1}{3}$

$x \div 7 = x \times \frac{1}{7} = \frac{x}{7}$

$x \div 7$은 나눗셈 기호 $\div$를 생략하여 $\frac{x}{7}$와 같이 간단히 나타낼 수 있다.

일반적으로 문자를 사용한 식에서 나눗셈 기호 $\div$를 생략할 때에는 다음과 같이 간단히 나타낸다.

나눗셈 기호의 생략

나눗셈 기호를 생략할 때에는 분수의 꼴로 나타낸다.

$$a \div b = \frac{a}{b} \ (\text{단, } b \neq 0)$$

$\neq$는 서로 같지 않음을 나타내는 기호이다.

참고 ① $a \div 1 = a$, $a \div (-1) = \frac{a}{-1} = -\frac{a}{1} = -a$

② $(a+b) \div c = \frac{a+b}{c}$

③ $a \div bc = a \div (b \times c) = \frac{a}{bc}$

문제 3 다음 식을 나눗셈 기호를 생략하여 나타내시오.

(1) $(-4) \div a$ (2) $2x \div y$

(3) $m \div (-5n)$ (4) $6 \div (a-b)$

문제 4 다음 식을 곱셈 기호, 나눗셈 기호를 생략하여 나타내시오.

(1) $a \times 6 \div b$ (2) $x \div (-8) \times a$

(3) $7 \times a + b \div 2$ (4) $x \times 9 - y \div 3 \times z$

문제 5 다음을 곱셈 기호, 나눗셈 기호를 사용하지 않은 식으로 나타내시오.

(1) 가로, 세로의 길이가 각각 a cm, b cm인 직사각형의 둘레의 길이

(2) 5명이 x원씩을 내서 한 개에 y원인 물건 3개를 사고 남은 돈

(3) x km를 시속 60 km로 가는 데 걸린 시간과 120 km를 시속 y km로 가는 데 걸린 시간의 합

(시간) $= \frac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$

표현하기

런지 동작

① 자신이 원하는 문자를 사용하여 수량 사이의 관계를 나타낸 문장을 만들고, 이를 문자를 사용한 식으로 나타내어 보자.

예 런지 동작을 10회씩 a세트 할 때, 실시한 런지 동작의 총횟수 ➔ $10a$회

② 문자, 수, 일상 언어의 공통점과 차이점을 말해 보자.

식의 값

생각톡

우리나라에서는 온도를 섭씨온도(°C)로 나타내고, 미국에서는 화씨온도(°F)로 나타낸다. 화씨온도 x °F를 섭씨온도로 나타내면 $\frac{5}{9}(x-32)$ °C이다.

탐구 화씨 5도를 섭씨온도로 나타내어 보자.

강추위로 얼어붙은 애틀랜타

애틀랜타에 강추위가 들이닥쳤다. 8일 일부 지역의 기온이 화씨 5도(5°F)까지 내려간 가운데, 각 지역 정부는 방한 대책 마련에 나섰다.

(출처: 「중앙일보」, 2015. 1. 8.)

위의 생각톡에서 화씨 5도를 섭씨온도로 나타내려면 식 $\frac{5}{9}(x-32)$의 문자 x 대신에 5를 넣어

$$\frac{5}{9}\times(5-32)=\frac{5}{9}\times(-27)=-15\,(°C)$$

와 같이 계산하면 된다.

이와 같이 문자를 사용한 식에서 문자에 어떤 수를 바꾸어 넣는 것을 **대입**한다고 하고, 대입하여 계산한 결과를 식의 값이라고 한다.

$\frac{5}{9}(x-32)$

x에 5를 대입

$\frac{5}{9}\times(5-32)$

대입(代入)은 '대신하여 넣는다.'는 뜻이다.

보기 ❶ $a=\frac{1}{3}$일 때, $3a+1$의 값은

$$3a+1=3\times\frac{1}{3}+1=1+1=2$$

❷ $x=-3$일 때, x^2-4의 값은

$$x^2-4=(-3)^2-4=9-4=5$$

음수를 대입할 때에는 괄호를 사용한다.

문제 6 $a=-2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $5a+1$ (2) $(-a)^2+3a$

예제 1 $a=5$, $b=-1$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $2a-3b$ (2) a^2-b^2

풀이 (1) $2a-3b=2\times5-3\times(-1)=10+3=13$

(2) $a^2-b^2=5^2-(-1)^2=25-1=24$

답 (1) 13 (2) 24

문제 7 $x=3$, $y=-4$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $x-2y$ (2) x^2+xy

창의·융합

문제 8 탄수화물, 단백질, 지방은 우리 몸속에서 에너지를 내는 영양소로, 1 g당 각각 4 kcal, 4 kcal, 9 kcal의 열량을 낸다고 한다. 혜미가 탄수화물, 단백질, 지방을 각각 50 g, a g, b g 섭취했을 때, 다음에 답하시오.

(1) 혜미가 얻은 열량을 a, b를 사용한 식으로 나타내시오.

(2) $a=25$, $b=20$일 때, 혜미가 얻은 열량을 구하시오.

확인하기

1 다음을 문자를 사용한 식으로 나타내시오.

(1) 강아지 a마리와 병아리 b마리의 다리의 개수의 합

(2) 십의 자리의 숫자가 6이고 일의 자리의 숫자가 x인 자연수

2 $a=4$, $b=-3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $2a+b$ (2) $\frac{1}{2}a-3b$ (3) a^2-ab-6

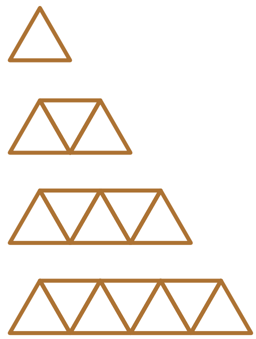
수학 역량 플러스

막대의 개수

추론 의사소통

길이가 같은 막대를 오른쪽 그림과 같이 연결해 나갈 때, [1단계], [2단계], [3단계], [4단계]에서 사용된 막대는 각각 3개, 7개, 11개, 15개이다.

그렇다면 [n단계]에서 사용된 막대는 모두 몇 개일까?



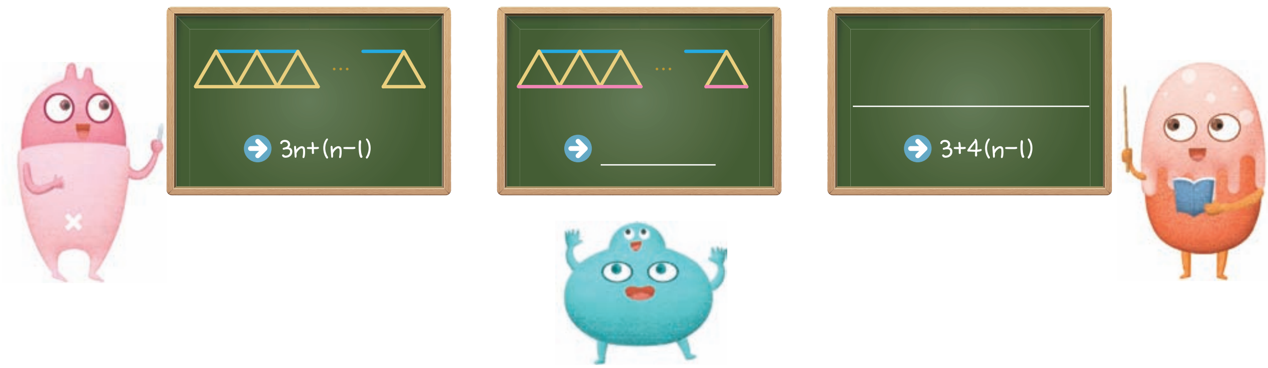
[1단계] → 3개

[2단계] → 7개

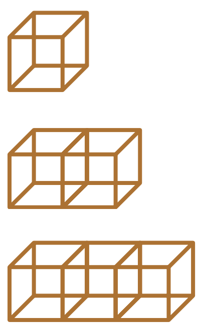
[3단계] → 11개

[4단계] → 15개

활동 1 다음은 [n단계]에서 사용된 막대의 개수를 구하는 방법을 그림으로 표현한 후, 이를 이용하여 막대의 개수를 n을 사용한 식으로 나타낸 것이다. 밑줄 친 곳에 알맞은 것을 써넣어 보자.



활동 2 길이가 같은 막대를 오른쪽 그림과 같이 연결해 나갈 때, [n단계]에서 사용된 막대의 개수를 n을 사용한 식으로 나타내고, 자신의 방법을 설명해 보자.



[1단계] → 12개

[2단계] → 20개

[3단계] → 28개

2 일차식의 계산

일차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

일차식

생각 톡

오늘 관람한 농구 경기에서 지후가 응원한 팀은 2점 슛 x개와 3점 슛 y개, 자유투 7개를 성공하여 승리하였다.

탐구 지후가 응원한 팀이 얻은 총점수를 x, y를 사용한 식으로 나타내어 보자.

식 $3x+4y+6$은 $3x$, $4y$, 6의 합으로 이루어져 있다. 이때 수 또는 문자의 곱으로만 이루어진 $3x$, $4y$, 6을 각각 $3x+4y+6$의 **항**이라고 한다. 특히 6과 같이 수로만 이루어진 항을 **상수항**이라고 한다. 또 $3x$와 같이 수와 문자의 곱으로 이루어진 항에서 문자 x에 곱해진 수 3을 x의 **계수**라고 한다.

$$\underbrace{\overset{x\text{의 계수}}{3}x + \overset{y\text{의 계수}}{4}y + \overset{\text{상수항}}{6}}_{\text{항}}$$

한편 $2y$, $5x+3$과 같이 한 개의 항 또는 여러 개의 항의 합으로 이루어진 식을 **다항식**이라 하고, 다항식 중에서 $2y$와 같이 한 개의 항으로만 이루어진 식을 **단항식**이라고 한다.

$4x-3y+5$는 $4x+(-3y)+5$로 생각한다.

보기 다항식 $4x-3y+5$에서

1. 항은 $4x$, $-3y$, 5이고 상수항은 5이다.
2. x의 계수는 4이고 y의 계수는 -3이다.

문제 1 **다음 다항식에서 항, 상수항, 각 문자의 계수를 말하시오.**

(1) $4x-2$ (2) $-a+3$ (3) $\dfrac{x}{2}-7y-1$

$3x^2$은 $3\times x\times x$로 문자 x가 2개 곱해진 항이고, $7x$는 $7\times x$로 문자 x가 1개 곱해진 항이다.

$$3x^{\overset{\text{차수}}{2}}$$

이와 같이 어떤 항에서 문자가 곱해진 개수를 그 문자에 대한 항의 **차수**라고 한다. 즉 x에 대한 $3x^2$의 차수는 2이고 $7x$의 차수는 1이다.

다항식에서 차수가 가장 큰 항의 차수를 그 다항식의 차수라고 한다. 특히 차수가 1인 다항식을 **일차식**이라고 한다.

보기 ❶ 다항식 $-4x^2+3x-2$에서 차수가 가장 큰 항은 $-4x^2$이고 이 항의 차수는 2이므로 이 다항식의 차수는 2이다.

❷ 다항식 $5x+1$에서 차수가 가장 큰 항은 $5x$이고 이 항의 차수는 1이므로 이 다항식은 일차식이다.

문제 2 **다음 다항식의 차수를 말하고, 일차식을 모두 찾으시오.**

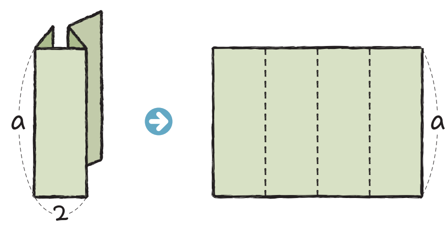
(1) $7-x$　　(2) $6a^2-10a+3$

(3) $9b-2$　　(4) $\frac{3}{7}y^3+y-1$

일차식과 수의 곱셈, 나눗셈

생각톡

세로의 길이가 a인 직사각형 모양의 종이를 다음 그림과 같이 4등분 하여 접었다가 펼쳤다.



[그림 1]　　[그림 2]

탐구 ① [그림 1]에서 접힌 종이의 한 면의 넓이를 이용하여 종이 전체의 넓이를 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.

탐구 ② [그림 2]에서 펼친 종이의 가로의 길이를 이용하여 종이 전체의 넓이를 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.

위의 생각톡에서 [그림 1]과 [그림 2]의 종이 전체의 넓이가 같으므로

$$2a\times 4=8a$$

임을 알 수 있다.

곱셈의 교환법칙
$ab=ba$
곱셈의 결합법칙
$(ab)c=a(bc)$

이것은 오른쪽과 같이 곱셈의 교환법칙과 결합법칙을 이용하여 계산한 것과 같다.

이와 같이 단항식과 수의 곱셈은 수끼리 곱하여 수를 문자 앞에 쓴다.

$$\begin{aligned}2a\times4&=(2\times a)\times4\\&=2\times(a\times4)\\&=2\times(4\times a)\\&=(2\times4)\times a\\&=8a\end{aligned}$$

결합법칙
교환법칙
결합법칙

한편 단항식을 수로 나눌 때에는 수의 나눗셈과 마찬가지로 나누는 수의 역수를 곱하여 계산한다.

$5x\div8=\frac{5x}{8}=\frac{5}{8}x$

보기 ① $4a\times(-3)=4\times a\times(-3)=4\times(-3)\times a=-12a$

② $5x\div8=(5\times x)\times\frac{1}{8}=5\times\frac{1}{8}\times x=\frac{5}{8}x$

문제 3 **다음을 계산하시오.**

(1) $8x\times7$

(2) $\frac{2}{3}b\times(-6)$

(3) $(-10x)\div2$

(4) $9y\div\frac{3}{4}$

분배법칙
$a(b+c)=ab+ac$
$(a+b)c=ac+bc$

일차식에 수를 곱할 때에는 분배법칙을 이용하여 일차식의 각 항에 그 수를 곱하여 계산한다.

$$\begin{aligned}3(5x+2)&=3\times5x+3\times2\\&=15x+6\end{aligned}$$

또 일차식을 수로 나눌 때에는 나누는 수의 역수를 곱하여 계산한다.

$$\begin{aligned}(6x-12)\div\frac{3}{2}&=(6x-12)\times\frac{2}{3}\\&=6x\times\frac{2}{3}-12\times\frac{2}{3}\\&=4x-8\end{aligned}$$

문제 4 **다음을 계산하시오.**

(1) $3(3x-2)$

(2) $(-4a+9)\times2$

(3) $(-8x+12)\div4$

(4) $(10x-5)\div(-5)$

(5) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)\times(-6)$

(6) $(3b-7)\div\left(-\frac{1}{2}\right)$

오류 찾기 다음 계산을 바르게 고쳐 보자.

① $-(x+3)=-x+3$

② $\dfrac{8x+2}{2}=4x+2$

일차식의 덧셈과 뺄셈

생각톡

연아네 가족 3명과 주찬이네 가족 5명이 1인당 관람료가 x원인 음악회를 함께 보러 갔다.

탐구 ① 연아네 가족과 주찬이네 가족의 관람료를 각각 x를 사용한 식으로 나타내어 보자.

탐구 ② 두 가족 8명의 관람료를 x를 사용한 식으로 나타내어 보자.

위의 생각톡에서 연아네 가족 3명의 관람료는 $3x$원이고 주찬이네 가족 5명의 관람료는 $5x$원이다. 이때 $3x$와 $5x$는 문자와 차수가 각각 같다.

이와 같이 문자와 차수가 각각 같은 항을 그 문자에 대한 **동류항**이라고 한다. 특히 상수항은 모두 동류항이다.

동류항에서 동류(同類)는 '같은 무리'라는 뜻이다.

보기 $2x+3y-1+5x-2y+8$에서

$2x$와 $5x$, $3y$와 $-2y$, -1과 8

은 각각 동류항이다.

문제 5 **다음에서 동류항을 모두 말하시오.**

(1) $5a-3b-4a+b$

(2) $y^2-4y+3y^2+7$

한편 위의 생각톡에서 두 가족의 관람료의 합은 8명의 관람료와 같으므로

$$3x+5x=8x$$

임을 알 수 있다.

이것은 오른쪽과 같이 분배법칙을 이용하여 계산한 것과 같다.

이와 같이 동류항이 있는 다항식은 동류항끼리 모은 후 분배법칙을 이용하여 간단히 할 수 있다.

$$\begin{aligned} 3x+5x &= 3\times x+5\times x \\ &= (3+5)\times x \\ &= 8x \end{aligned}$$

분배법칙

문제 6 **다음을 간단히 하시오.**

(1) $-x+9x$ (2) $11y-4y+7y$

(3) $6x-5+3x-8$ (4) $2a+3-4a-15$

일차식의 덧셈은 괄호가 있으면 괄호를 먼저 풀고 동류항끼리 모아서 계산한다. 또 일차식의 뺄셈은 수의 뺄셈과 마찬가지로 빼는 식의 각 항의 부호를 바꾸어 더한다.

예제 1 **다음을 계산하시오.**

(1) $(a+3)+(2a-7)$ (2) $(2x+5)-(-3x+1)$

(1)
$$\begin{array}{rr} & a+3 \\ +) & 2a-7 \\ \hline & 3a-4 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rr} & 2x+5 \\ -) & -3x+1 \\ \hline & 5x+4 \end{array}$$

풀이 (1) $(a+3)+(2a-7)=a+3+2a-7$

$=a+2a+3-7$

$=3a-4$

(2) $(2x+5)-(-3x+1)=(2x+5)+(3x-1)$

$=2x+5+3x-1$

$=2x+3x+5-1$

$=5x+4$

답 (1) $3a-4$ (2) $5x+4$

문제 7 **다음을 계산하시오.**

(1) $(2a-13)+(a-5)$ (2) $(8x+2)+(-x+1)$

(3) $(3a-10)-(-4a+2)$ (4) $(-2x-9)-(6x-3)$

예제 2 **다음을 계산하시오.**

(1) $2(3a-2)+7(a+1)$ (2) $3(2x-1)-4(-x+5)$

풀이 (1) $2(3a-2)+7(a+1)=6a-4+7a+7$

$=6a+7a-4+7$

$=13a+3$

(2) $3(2x-1)-4(-x+5)=6x-3+4x-20$

$=6x+4x-3-20$

$=10x-23$

답 (1) $13a+3$ (2) $10x-23$

문제 8 **다음을 계산하시오.**

(1) $4(-a+3)+6(2a-9)$ (2) $3(4x-5)-2(11x-8)$

(3) $-\frac{1}{4}(8x+12)+\frac{2}{5}(15x-10)$ (4) $\frac{13x-7}{2}-\frac{5x+2}{3}$

확인하기

1 다항식 $-3x^2+x-4$에 대하여 다음을 말하시오.

(1) 항 (2) 상수항

(3) x^2의 계수 (4) 다항식의 차수

2 다음을 계산하시오.

(1) $(-2x+1)\times 4$ (2) $(15-6a)\div\left(-\frac{3}{4}\right)$

(3) $(7x-2)-(3x+9)$ (4) $-3(2x-4)+2(2x-9)$

사고력+ 문자 x를 이용하여 다음을 설명하시오.

❶ 어떤 수의 3배에 어떤 수보다 1만큼 큰 수를 더한다.
❷ ❶의 결과에 11을 더하고 그것을 4로 나눈다.
❸ ❷의 결과에서 3을 뺀다.
❹ ❸의 결과는 ❶의 어떤 수와 같다.

수학 역량 플러스

할인한 가격이 같을까

의사소통 창의·융합

A, B, C 세 가게에서 다음과 같은 할인 행사를 하고 있다. 정가가 같은 제품을 4월 5일에 세 가게에서 각각 판매할 때, 과연 판매 가격이 모두 같을까?

A가게

B가게

C가게

정가가 1000원인 제품에 대하여 4월 5일의 판매 가격을 구하면 다음과 같다.

A가게

1000(원)

30 % 할인

$1000\times\frac{70}{100}=700$(원)

판매 가격

B가게

1000(원)

20 % 할인

$1000\times\frac{80}{100}=800$(원)

10 % 할인

$800\times\frac{90}{100}=720$(원)

판매 가격

C가게

1000(원)

10 % 할인

$1000\times\frac{90}{100}=900$(원)

20 % 할인

$900\times\frac{80}{100}=720$(원)

판매 가격

활동 1 A, B, C 세 가게에서 판매하는 정가가 x원인 제품에 대하여 4월 5일의 판매 가격을 x를 사용한 식으로 나타내어 보자.

활동 2 활동 1 의 세 식을 비교하여 알 수 있는 사실을 말해 보자.

중단원 마무리

Ⅱ-1 문자와 식

정답 및 풀이 282쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 곱셈 기호와 나눗셈 기호의 생략

66쪽

(1) 수와 문자의 곱에서는 곱셈 기호를 생략하고 수를 문자 앞에 쓴다.

(2) 문자와 문자의 곱에서는 곱셈 기호를 생략하고 보통 알파벳 순서로 쓴다.

(3) 같은 문자의 곱은 ☐으로 나타낸다.

(4) 나눗셈 기호를 생략할 때에는 ☐의 꼴로 나타낸다.

❷ 식의 값

68쪽

문자를 사용한 식에서 문자에 어떤 수를 바꾸어 넣는 것을 ☐한다고 하고, 계산한 결과를 식의 값이라고 한다.

❸ 일차식의 계산

71쪽

(1) 다항식

① ☐: 수로만 이루어진 항

② ☐: 수와 문자의 곱으로 이루어진 항에서 문자에 곱해진 수

③ ☐: 한 개의 항 또는 여러 개의 항의 합으로 이루어진 식

④ ☐: 한 개의 항으로 이루어진 식

⑤ ☐: 문자가 있는 항에서 문자가 곱해진 개수

⑥ 다항식의 차수: 다항식을 이루는 각 항의 차수 중에서 가장 큰 값

⑦ 일차식: 차수가 1인 다항식

⑧ ☐: 문자와 차수가 각각 같은 항

(2) 일차식에 수를 곱할 때에는 ☐을 이용하여 일차식의 각 항에 그 수를 곱하여 계산하고, 일차식을 수로 나눌 때에는 나누는 수의 ☐를 곱하여 계산한다.

(3) 일차식의 덧셈과 뺄셈은 먼저 괄호를 풀고 ☐끼리 모아서 계산한다.

표준 문제

01 곱셈 기호, 나눗셈 기호를 생략하여 나타낸 것으로 옳은 것을 보기에서 모두 고르시오.

보기

(ㄱ) $x\times x\times x=3x$　　(ㄴ) $0.1\times a=0.1a$

(ㄷ) $x\times(-4)\times y=-4xy$　　(ㄹ) $3\div a\times b=\dfrac{3}{ab}$

02 $a=-2$일 때, 다음에서 식의 값이 가장 큰 식과 가장 작은 식을 구하시오.

$-a^2$ $\quad$ $3a+5$ $\quad$ a^3 $\quad$ $\frac{1}{2}a+7$ $\quad$ $(-a)^2$

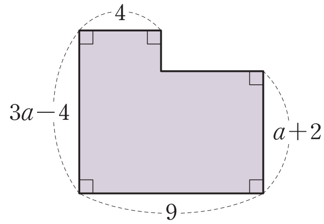
03 키가 x cm인 사람의 표준 체중은 $0.9(x-100)$ kg이라고 한다. 경미의 키가 150 cm일 때, 경미의 표준 체중을 구하시오.

04 다음 중에서 x에 대한 일차식이 아닌 것은?

① $4x+1$ ② $-3x-4$ ③ $2(x+1)-2$
④ $\frac{1}{2}(2x^2+3x)-x^2$ ⑤ $5x-x+6-4x$

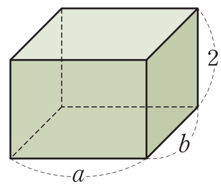
서술형 **05** 다항식 $2(3x-2)-4(5-x)$를 간단히 하면 x의 계수는 a, 상수항은 b이다. $a-b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

06 오른쪽 도형의 넓이를 a를 사용한 식으로 나타내시오.



서술형 **07** 오른쪽 그림은 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b, 높이가 2인 직육면체이다. 다음에 답하시오.

(1) 직육면체의 겉넓이를 a, b를 사용한 식으로 나타내시오.
(2) $a=5$, $b=3$일 때, 직육면체의 겉넓이를 구하시오.



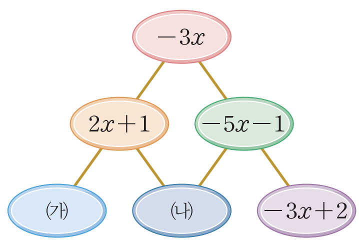
도전 문제

문제 해결 **08** 1학기 전교 회장 선거 벽보를 다음과 같이 압정을 이용하여 게시판에 붙이려고 한다. 물음에 답하시오.

1장 2장 3장

(1) n장의 벽보를 붙일 때, 필요한 압정의 개수를 n을 사용한 식으로 나타내시오.
(2) 8장의 벽보를 붙일 때, 필요한 압정의 개수를 구하시오.

추론 **09** 오른쪽 그림에서 윗줄의 식은 아랫줄의 이웃한 두 식을 더한 것이다. ㈎, ㈏에 알맞은 식을 구하시오.



서술형 **10** x에 대한 일차식 A에서 $2x-10$을 2배 하여 빼야 할 것을 잘못하여 $\frac{1}{2}$배 하여 더했더니 $3x+4$가 되었다. 바르게 계산한 식을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

2 일차방정식

준비 학습

식의 값

1 $x=-3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $2x-7$　　(2) $-4x+5$

일차식의 계산

2 다음을 계산하시오.

(1) $x+(-8x+5)$　　(2) $(2x+1)-(3x-3)$

(3) $-4x+6(-2x-1)$　　(4) $9(2x+3)-3(5+x)$

1 방정식과 그 해

방정식과 그 해의 의미를 알고, 등식의 성질을 이해한다.

방정식

생각 톡

아영이는 인터넷 상점에서 체육 대회 때 입을 단체 티셔츠 25장을 주문하고 배송비 2500원을 포함하여 19만 원을 결제하였다.

탐구 단체 티셔츠 한 장의 값을 x원이라고 할 때, 위의 상황을 등호를 사용하여 나타내어 보자.

$2x+1=5$
좌변 우변
양변

식 $2x+1=5$와 같이 등호 $=$를 사용하여 나타낸 식을 **등식**이라고 한다. 등식에서 등호의 왼쪽 부분을 좌변, 오른쪽 부분을 우변이라 하고, 좌변과 우변을 통틀어 양변이라고 한다.

보기 $7-3=4$, $3x-1=2$는 등식이고, $5x^2-3x$, $2<3$은 등식이 아니다.

문제 1 **다음 문장을 등식으로 나타내시오.**

(1) 어떤 수 x를 4배 하여 3을 더한 값은 9이다.

(2) 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 둘레의 길이는 20 cm이다.

(3) 40개의 빵을 x명의 사람에게 3개씩 나누어 주었더니 4개가 남았다.

좌변의 값과 우변의 값이 같으면 참, 같지 않으면 거짓이다.

등식 $2x+1=5$의 x에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하여 등식이 참이 되는지 알아보면 다음과 같다.

x의 값	좌변의 값	우변의 값	참, 거짓
1	$2\times1+1=3$	5	거짓
2	$2\times2+1=5$	5	참
3	$2\times3+1=7$	5	거짓
4	$2\times4+1=9$	5	거짓

위의 표에서 등식 $2x+1=5$는 x의 값이 2일 때 참이 되고 x의 값이 1, 3, 4일 때 거짓이 된다.

이와 같이 x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식을 x에 대한 **방정식**이라 하고, 문자 x를 그 방정식의 **미지수**라고 한다.

또 방정식이 참이 되게 하는 미지수의 값을 그 방정식의 **해** 또는 **근**이라 하고, 방정식의 해를 모두 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

예를 들어 등식 $2x+1=5$는 x에 대한 방정식이고, x의 값이 2일 때 참이 되므로 2는 이 방정식의 해이다.

문제 2 **다음에서 -2를 해로 갖는 방정식을 모두 찾으시오.**

(1) $x+5=7$　　(2) $3x+2=2x$

(3) $5x+10=0$　　(4) $x-4=8-6x$

한편 등식 $x+2x=3x$는 미지수 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 참이 된다. 이와 같이 미지수 x가 어떤 값을 갖더라도 항상 참이 되는 등식을 x에 대한 **항등식**이라고 한다.

문제 3 **다음에서 항등식을 모두 찾으시오.**

(1) $4x-1=3x$　　(2) $x+11=11-x$

(3) $9(x-1)=9x-9$　　(4) $3(2x+1)-x=5x+3$

이야기 수학

미지수 X 이야기

X-선, X-파일 등에서 X는 무엇을 뜻할까?
X-선은 발견 당시 ‘이 전자파의 정체를 알지 못한다.’는 의미로 X-선이라는 이름을 붙였다고 전해진다. 또 X-파일은 알려지지 않거나 밝혀지지 않은 일을 기록한 파일을 뜻한다.
이와 같이 알파벳 X는 보통 미지의 것을 나타낼 때 사용하는데, 이는 프랑스 수학자 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)가 그의 책에서 방정식의 미지수를 x로 나타낸 데서 유래하였다. 이때부터 x를 미지수를 나타낼 때 사용하기 시작하였고, 더 나아가 일상생활에서 미지의 것을 나타낼 때 쓰게 되었다.

(출처: 칼 B. 보이어, 『수학의 역사·하』)

등식의 성질

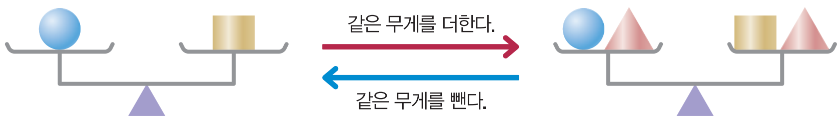
생각톡

오른쪽과 같이 윗접시저울의 양쪽 접시에 구와 원기둥을 각각 한 개씩 올려놓았더니 저울이 평형을 이루었다.

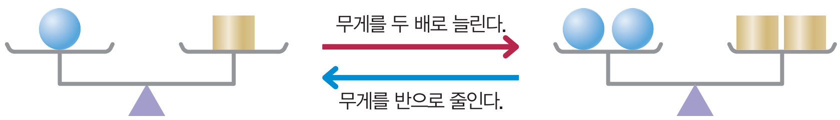
탐구 ① 양쪽 접시에 같은 무게의 원뿔을 올려놓아도 저울이 평형을 이루는지 말해 보자.

탐구 ② 양쪽 접시에 있는 물건의 무게를 각각 두 배로 늘려도 저울이 평형을 이루는지 말해 보자.

평형을 이루는 윗접시저울의 양쪽 접시에 같은 무게의 물건을 올려놓거나 양쪽 접시에서 같은 무게의 물건을 내려놓아도 저울은 여전히 평형을 이룬다.



또 평형을 이루는 윗접시저울의 양쪽 접시에 올려놓은 물건의 무게를 두 배로 늘리거나 반으로 줄여도 저울은 여전히 평형을 이룬다.



윗접시저울이 평형을 이룬다는 것은 양쪽의 무게가 같다는 것을 의미하는데, 두 식이 같음을 나타내는 등식에서도 이와 같은 성질이 성립한다.

즉 등식의 양변에 같은 수를 더하거나 양변에서 같은 수를 빼도 등식은 성립하고, 양변에 같은 수를 곱하거나 양변을 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식은 성립한다.

일반적으로 등식에서 다음과 같은 성질이 성립한다.

등식의 성질

$a=b$일 때

❶ 등식의 양변에 같은 수를 더해도 등식은 성립한다. $a+c=b+c$

❷ 등식의 양변에서 같은 수를 빼도 등식은 성립한다. $a-c=b-c$

❸ 등식의 양변에 같은 수를 곱해도 등식은 성립한다. $ac=bc$

❹ 등식의 양변을 0이 아닌 같은 수로 나누어도 등식은 성립한다. $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ (단, $c\neq 0$)

문제 4 **등식의 성질을 이용하여 $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.**

(1) $2x-4=3$의 양변에 $\square$를 더하면 $2x=7$이다.

(2) $-3x+5=10$의 양변에서 $\square$를 빼면 $-3x=5$이다.

(3) $\frac{1}{4}x=3$의 양변에 $\square$를 곱하면 $x=12$이다.

(4) $7x=-14$의 양변을 $\square$로 나누면 $x=-2$이다.

등식의 성질을 이용하면 방정식 $x+2=5$를 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$x+2=5 \xrightarrow{\text{양변에서 2를 뺀다.}} x=3$$

이때 $x=3$을 $x+2=5$에 대입하면 이 방정식은 참이 된다. 따라서 $x=3$은 방정식 $x+2=5$의 해이다.

이와 같이 x에 대한 방정식은 등식의 성질을 이용하여 주어진 방정식을

$$x=(\text{수})$$

의 꼴로 바꾸어 해를 구할 수 있다.

문제 5 **등식의 성질을 이용하여 다음 방정식을 푸시오.**

(1) $x-3=-2$

(2) $x+5=1$

(3) $\frac{3}{2}x=12$

(4) $-2x=8$

등식의 성질을 이용하면 등식의 한 변에 있는 항을 다른 변으로 옮길 수 있다.

예를 들어 $3x-2=7$의 양변에 2를 더하면

$$3x-2+2=7+2$$

이고 좌변을 정리하면

$$3x=7+2$$

이다. 이것은 등식 $3x-2=7$에서 좌변의 -2를 그 부호만 바꾸어 우변으로 옮긴 것과 같다.

이와 같이 등식의 성질 ❶ 또는 ❷를 이용하여 등식의 어느 한 변에 있는 항을 부호만 바꾸어 다른 변으로 옮기는 것을 **이항**이라고 한다.

$3x-2=7$

이항

$3x=7+2$

이항(移項)은 '항을 옮긴다.'는 뜻이다.

문제 6 **다음 등식에서 밑줄 친 항을 이항하시오.**

(1) $2x\underline{+1}=2$ (2) $x\underline{-4}=7$

(3) $x+20=\underline{-4x}$ (4) $-2x\underline{+5}=6\underline{-3x}$

확인하기

1 다음에서 [ ] 안의 수가 주어진 방정식의 해인 것을 모두 찾으시오.

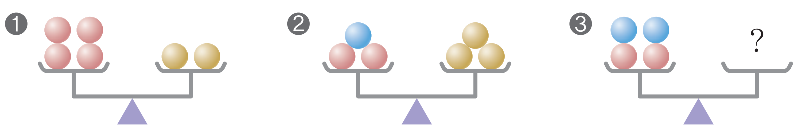
(1) $x+3=1$ [2] (2) $\frac{1}{2}x=-5$ [-10]

(3) $1-x=x+1$ [0] (4) $2(x-1)=1-x$ [-1]

2 등식의 성질을 이용하여 다음 방정식을 푸시오.

(1) $x-2=8$ (2) $\frac{4}{3}x=-12$

사고력 다음 그림과 같이 윗접시저울 ❶, ❷가 평형을 이루고 있다. ❸의 비어 있는 오른쪽 접시에 노란 구슬만 올려놓아 평형을 이루게 하려고 할 때, 필요한 노란 구슬의 개수를 구하시오.



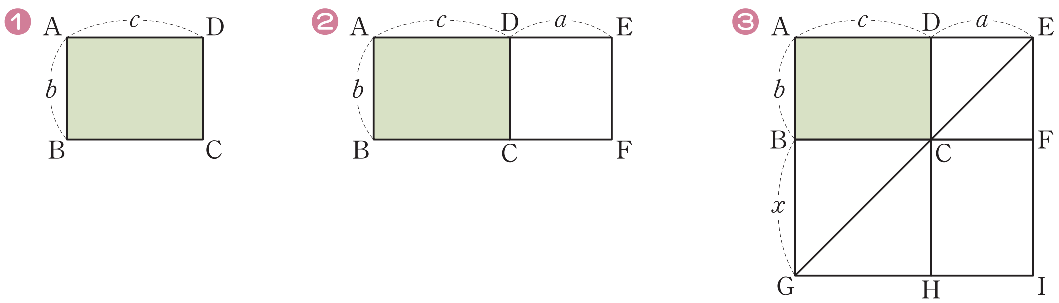
수학 역량 플러스

그림으로 방정식 풀기

추론 | 문제 해결

고대 그리스 수학자 유클리드(Euclid, B.C. 325?~B.C. 265?)는 방정식 $ax=bc$의 양변을 직사각형의 넓이로 생각하여 다음과 같이 해를 구하였다.

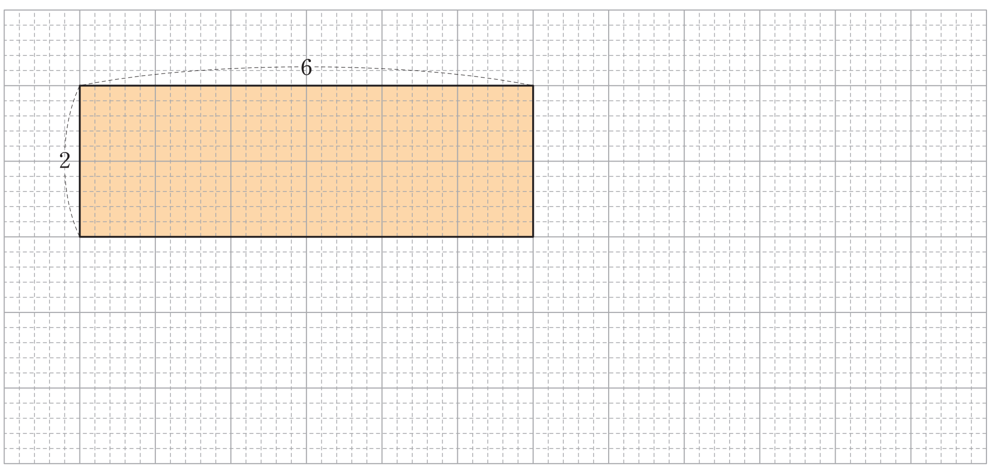
① 세로의 길이가 b이고 가로의 길이가 c인 직사각형 ABCD를 그린다.
② 선분 DE의 길이가 a가 되도록 점 E를 잡아 직사각형 DCFE를 그린다.
③ 직선 CE와 직선 AB가 만나는 점을 G라 하고 직사각형 AGIE를 그린다.
이때 선분 BG의 길이가 방정식 $ax=bc$의 해와 같다.



(출처: David Burton, 『The History of Mathematics』)

활동 1 위의 과정에서 선분 BG의 길이가 x인 이유를 설명해 보자.

활동 2 다음은 넓이가 12인 직사각형이다. 위와 같은 방법으로 방정식 $5x=12$의 해를 구해 보자.



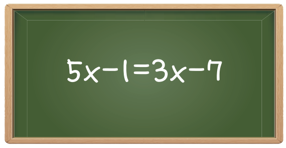
2 일차방정식

일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

일차방정식의 풀이

생각톡

오른쪽과 같은 방정식이 있다.



탐구 ① 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항해 보자.

탐구 ② **탐구 ①**의 식에서 좌변을 정리해 보자.

방정식 $3x+2=x-2$의 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하면

$$3x+2-x+2=0$$

이고, 좌변을 정리하면 $2x+4=0$이다.

이때 방정식 $2x+4=0$의 좌변 $2x+4$는 x에 대한 일차식이고 우변은 0이다.

이와 같이 방정식의 우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

$$(x\text{에 대한 일차식})=0$$

의 꼴로 나타나는 방정식을 x에 대한 **일차방정식**이라고 한다.

문제 1 **다음에서 일차방정식을 모두 찾으시오.**

(1) $6x-10$　　(2) $x-4=5x$

(3) $x^2-3=x$　　(4) $3(x+2)=2x-1$

일반적으로 일차방정식의 해를 구할 때에는 미지수를 포함한 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항한 후 동류항을 정리하여 푼다.

예제 1 **일차방정식 $5x-4=2x+11$을 푸시오.**

풀이 $2x$와 -4를 각각 이항하면　$5x-2x=11+4$

양변을 정리하면　$3x=15$

양변을 3으로 나누면　$x=5$

답 $x=5$

확인 방정식에 $x=5$를 대입하면
(좌변)$=5\times5-4=21$
(우변)$=2\times5+11=21$
따라서 $x=5$는 방정식의 해이다.

문제 2 **다음 일차방정식을 푸시오.**

(1) $4x-14=6$

(2) $-2x+7=10$

(3) $3x-8=2x-5$

(4) $5x+4=-x-20$

괄호가 있는 일차방정식은 먼저 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀어 정리한 후 방정식을 푼다.

예제 2 **일차방정식 $3(-x+3)=2x-1$을 푸시오.**

풀이 좌변에 있는 괄호를 풀면

$$-3x+9=2x-1$$
$$-3x-2x=-1-9$$
$$-5x=-10$$
$$x=2$$

답 $x=2$

문제 3 **다음 일차방정식을 푸시오.**

(1) $5(x+2)=2x+7$

(2) $6(3x-5)=4x+26$

(3) $x-4(-2x+1)=-10$

(4) $-5(x-2)=3(-x-4)$

계수가 소수인 일차방정식은 양변에 10, 100, 1000, …과 같은 수를 곱하여 계수를 정수로 고쳐서 풀면 편리하다.

예제 3 **일차방정식 $0.3x-1=0.1x+0.2$를 푸시오.**

풀이 양변에 10을 곱하면

$$3x-10=x+2$$
$$3x-x=2+10$$
$$2x=12$$
$$x=6$$

답 $x=6$

문제 4 **다음 일차방정식을 푸시오.**

(1) $0.5x-2.4=0.6$

(2) $3-0.1x=0.3x-0.2$

계수가 분수인 일차방정식은 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 계수를 정수로 고쳐서 풀면 편리하다.

예제 4

일차방정식 $\frac{1}{9}x-1=\frac{1}{6}x-\frac{2}{3}$를 푸시오.

풀이 양변에 분모의 최소공배수인 18을 곱하면

$$\begin{aligned} 2x-18&=3x-12 \\ 2x-3x&=-12+18 \\ -x&=6 \\ x&=-6 \end{aligned}$$

답 $x=-6$

문제 5

다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $\frac{1}{6}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x$

(2) $\frac{2x+1}{7}=4-x$

일차방정식의 풀이 방법을 정리하면 다음과 같다.

일차방정식의 풀이

1. 계수가 소수 또는 분수이면 양변에 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친다.
2. 괄호가 있으면 괄호를 풀어 정리한다.
3. 미지수 x를 포함한 항은 좌변으로, 상수항은 우변으로 이항하여 $ax=b$(단, $a\neq0$)의 꼴로 정리한다.
4. 양변을 미지수의 계수로 나누어 해를 구한다.

문제 만들기

오른쪽은 일차방정식 $\frac{3x+4}{5}=-1$의 해를 구하는 새로운 방법이다.

① 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 보자.

② 일차방정식을 만들어 오른쪽과 같은 방법으로 풀어 보자.

$$\begin{array}{ccc} x & = & \boxed{} \\ \times 3 & & \boxed{} \\ 3x & = & -9 \\ +4 & & -4 \\ 3x+4 & = & -5 \\ \div 5 & & \times 5 \\ \frac{3x+4}{5} & = & -1 \end{array}$$

일차방정식의 활용

여러 가지 수량과 관련된 문제 중에는 일차방정식을 활용하여 해결할 수 있는 경우가 있다.

영훈이는 학교 축제에서 자외선 감지 팔찌 만들기 체험관을 이틀 동안 운영하였다. 이틀 동안 300명의 학생이 체험했고 둘째 날 체험한 학생이 첫째 날 체험한 학생보다 40명이 많았을 때, 첫째 날 체험한 학생은 몇 명인지 구하시오.

위의 문제를 다음과 같은 순서로 해결해 보자.

미지수 정하기 첫째 날 체험한 학생을 x명이라고 하자.

방정식 세우기 둘째 날 체험한 학생은 $(x+40)$명이고, 이틀 동안 300명의 학생이 체험했으므로 방정식을 세우면

$$x+(x+40)=300$$

방정식 풀기 이 방정식을 풀면

$$2x+40=300, \qquad 2x=260, \qquad x=130$$

따라서 첫째 날 체험한 학생은 130명이다.

확인하기 첫째 날 체험한 학생이 130명이면 둘째 날 체험한 학생은 170명이고 합하여 300명이 되므로 문제의 뜻에 맞는다.

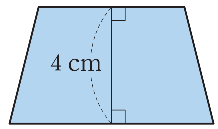
일반적으로 일차방정식을 활용하여 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 해결하면 편리하다.

일차방정식을 활용하여 문제를 푸는 순서

1. 미지수 정하기 　문제의 뜻을 이해하고, 구하려는 값을 미지수 x로 놓는다.
2. 방정식 세우기 　문제의 뜻에 맞게 x에 대한 일차방정식을 세운다.
3. 방정식 풀기 　일차방정식을 푼다.
4. 확인하기 　구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

문제 6 올해 은지의 나이는 13살, 아버지의 나이는 45살이다. 몇 년 후에 아버지의 나이가 은지의 나이의 3배가 되는지 구하시오.

문제 7 오른쪽 그림과 같이 높이가 4 cm인 사다리꼴에서 아랫변의 길이는 윗변의 길이보다 2 cm 더 길다. 사다리꼴의 넓이가 24 cm^2일 때, 아랫변의 길이를 구하시오.



예제 5 윤서네 가족은 레일바이크를 타고 A, B 두 지점을 왕복하였다. 갈 때에는 시속 15 km, 올 때에는 시속 12 km로 이동하여 총 45분이 걸렸을 때, 두 지점 A, B 사이의 거리를 구하시오.

	갈 때	올 때
거리	x km	x km
속력	시속 15 km	시속 12 km
시간	$\frac{x}{15}$시간	$\frac{x}{12}$시간

풀이 두 지점 A, B 사이의 거리를 x km라고 하자.

갈 때 걸린 시간은 $\frac{x}{15}$시간, 올 때 걸린 시간은 $\frac{x}{12}$시간이고 전체 걸린 시간은 45분, 즉 $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$(시간)이므로

$$\frac{x}{15}+\frac{x}{12}=\frac{3}{4}$$

양변에 60을 곱하면

$$4x+5x=45, \qquad 9x=45, \qquad x=5$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 5 km이다.

확인 갈 때 걸린 시간은 $\frac{5}{15}$(시간)$=20$(분), 올 때 걸린 시간은 $\frac{5}{12}$(시간)$=25$(분)이므로 총 45분이 걸렸다. 따라서 문제의 뜻에 맞는다.

답 5 km

문제 8 학교에서 집까지 갈 때, 시속 18 km로 자전거를 타고 가면 시속 4 km로 걸어가는 것보다 35분 빨리 도착한다고 한다. 학교에서 집까지의 거리를 구하시오.

확인하기

1 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $3x-1=8$

(2) $2x+1=5x+7$

(3) $5(x+4)=3(-x-1)-1$

(4) $\frac{x}{3}+\frac{1}{6}=0.5x-1$

2 연속한 네 자연수의 합이 50일 때, 이 네 자연수를 구하시오.

수학 역량 플러스

문제를 해결하는 여러 가지 방법

문제 해결 의사소통

이탈리아 수학자 피보나치(Fibonacci, 1170?~1250?)의 책『산반서』에는 다음과 같은 문제가 있다.

어떤 사람이 세 개의 문을 통과하여 과수원에 들어가서 사과를 땄다. 그가 과수원을 떠날 때,
첫 번째 문에서 문지기에게 딴 사과의 절반을 주고 한 개를 더 주었고,
두 번째 문에서도 문지기에게 나머지 사과의 절반을 주고 한 개를 더 주었다.
세 번째 문에서도 같은 방법으로 문지기에게 사과를 주었더니 그에게는 단 한 개의
사과만 남았다. 그가 처음 딴 사과의 개수는?

활동 1 위의 문제를 아래와 같은 방법으로 풀어 보자.

(1) 거꾸로 풀기　다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

세 번째 문지기에게 주기 전의 사과의 개수는　$\square\times(1+1)=\square$
두 번째 문지기에게 주기 전의 사과의 개수는　$\square\times(\square+1)=\square$
첫 번째 문지기에게 주기 전의 사과의 개수는　$\square\times(\square+1)=\square$

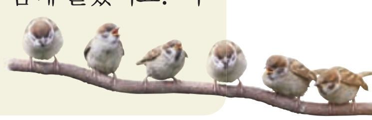
(2) 추측하여 풀기　다음 표를 완성하여 사과의 개수를 구해 보자.

수확한 사과	14	16	18	20	22
첫 번째 문지기에게 준 사과	8				
두 번째 문지기에게 준 사과	4				
세 번째 문지기에게 준 사과	2				
남은 사과	0				

(3) 방정식으로 풀기　방정식을 이용하여 사과의 개수를 구해 보자.

활동 2 인도 수학자 바스카라(Bhaskara, A., 1114~1185(1193?))의 책『리라바티』에는 다음과 같은 문제가 있다. 위의 세 가지 방법으로 풀어 보고, 더 나은 풀이 방법을 찾아 설명해 보자.

선녀같이 아름다운 눈동자의 아가씨여! 참새 몇 마리가 들판에서 놀고 있는데 두 마리가 더 날아왔어요. 그리고 저 푸른 숲에서 그것의 다섯 배가 되는 귀여운 참새 떼가 날아와서 함께 놀았어요. 저녁노을이 질 무렵, 열 마리의 참새는 숲으로 돌아가고 남은 참새 스무 마리는 밀밭에 숨었어요. 처음 참새는 몇 마리였는지 내게 말해 주세요.



(출처: 송륜진,『디오판토스가 들려주는 일차방정식 이야기』)

정답 및 풀이 284쪽

중단원 마무리

Ⅱ-2 일차방정식

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 방정식과 그 해

82쪽

(1) $\boxed{\quad\quad}$: 등호를 사용하여 나타낸 식

(2) $\boxed{\quad\quad}$: x의 값에 따라 참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는 등식

(3) $\boxed{\quad\quad}$: 방정식이 참이 되게 하는 미지수의 값

(4) $\boxed{\quad\quad}$: 미지수가 어떤 값을 갖더라도 항상 참이 되는 등식

❷ 등식의 성질

84쪽

(1) $a=b$일 때 다음이 성립한다.

① $a+c=b+c$　　② $a-c=b-c$

③ $ac=bc$　　④ $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ (단, $c\neq0$)

(2) $\boxed{\quad\quad}$: 등식의 한 변에 있는 항을 부호를 바꾸어 다른 변으로 옮기는 것

❸ 일차방정식

88쪽

우변에 있는 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

$(x$에 대한 일차식$)=0$

의 꼴로 나타나는 방정식을 x에 대한 $\boxed{\quad\quad}$이라고 한다.

표준 문제

01 등식 $6x-3=2(3x+a)$가 x에 대한 항등식일 때, a의 값을 구하시오.

02 이항만을 이용하여 등식 $7x+3=2x-4$를 $ax=b$의 꼴로 간단히 하였을 때, a, b의 값을 구하시오. (단, $a>0$)

03 보기에서 해가 같은 일차방정식끼리 짝 지으시오.

보기

(ㄱ) $x-5=-2$　　(ㄴ) $3(1+2x)=-6$

(ㄷ) $4-x=-2x+1$　　(ㄹ) $6x-(9x-4)=-5$

의사소통 **04** 오른쪽은 일차방정식 $\frac{3x-1}{4}=2$를 푸는 과정이다. ①, ②, ③에서 이용한 등식의 성질을 말하시오.

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{4}&=2 \\ 3x-1&=8 \quad ① \\ 3x&=9 \quad ② \\ x&=3 \quad ③ \end{aligned}$$

05 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $\frac{x-1}{3}=\frac{x+5}{2}-1$

(2) $0.6x-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}x-0.8$

06 비례식 $(2x+14):3=(-x+6):5$를 만족시키는 x의 값을 구하시오.

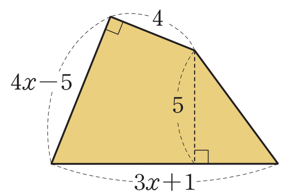
서술형 **07** 다음은 조선 시대 학자 황윤석(黃胤錫, 1729~1791)의 책 『이수신편』에 실린 문제이다. 물음에 답하시오.

> 스님 100명과 만두 100개가 있는데 큰스님은 한 명이 세 개씩, 작은 스님은 세 명이 한 개씩 만두를 나누어 먹었다고 한다.

(1) 큰스님을 x명이라고 할 때, 작은 스님의 수를 x를 사용한 식으로 나타내시오.

(2) 큰스님은 모두 몇 명인지 구하시오.

08 오른쪽 사각형의 넓이가 39일 때, x의 값을 구하시오.



09 수지네 가족이 여행을 갔는데 총 여행 일수의 $\frac{1}{4}$은 해남에 있었고, $\frac{1}{3}$은 여수에 있었고, $\frac{1}{6}$은 통영에 있었다. 마지막 3일은 부산에 있다가 집으로 돌아왔을 때, 수지네 가족의 총 여행 일수를 구하시오.

도전 문제

서술형 **10** x에 대한 두 일차방정식 $3(x+2)=5a+2$와 $\frac{2}{15}x+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}$의 해가 같을 때, a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결 **11** 일정한 속력으로 달리는 기차가 길이가 2700 m인 다리를 완전히 통과하는 데 40초가 걸리고, 길이가 7500 m인 터널을 완전히 통과하는 데 1분 40초가 걸린다고 한다. 이 기차의 길이를 구하시오.

서술형 **12** 오른쪽 그림의 달력에서 5개의 수를 ✚ 모양으로 고를 때, 다음에 답하시오.

일	월	화	수	목	금	토
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

(1) 가운데의 수를 x라고 할 때, 위쪽, 아래쪽, 왼쪽, 오른쪽에 있는 수를 차례대로 x를 사용한 식으로 나타내시오.

(2) (1)에서 고른 5개의 수의 합이 80일 때, 5개의 수를 구하시오.

대단원 마무리

정답 및 풀이 285쪽

01 다음 중에서 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하여 나타낸 식으로 옳지 않은 것은?

① $a \div b \times a = \dfrac{a^2}{b}$

② $x \div y \div 6 = \dfrac{x}{6y}$

③ $a \div \left(\dfrac{1}{3} \times b\right) = \dfrac{3a}{b}$

④ $a + b \div c = \dfrac{a+b}{c}$

⑤ $6 \times 2x \div \dfrac{1}{3} = 36x$

02 시속 40 km로 달리는 버스가 A도시에서 출발하여 a km만큼 떨어진 B도시에 도착한 후 30분 동안 머물다가 A도시로 돌아왔다. A도시를 출발한 버스가 A도시로 돌아오는 데 걸린 시간을 a를 사용한 식으로 나타내시오.

03 $x=-1$일 때, $x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{1000}$의 값을 구하시오.

04 옳은 것을 보기에서 모두 고르시오.

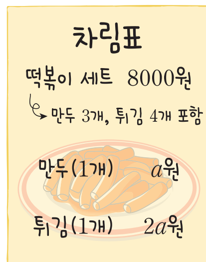
보기

(ㄱ) 다항식 $\dfrac{x}{2}+3y-7$의 항은 3개이다.

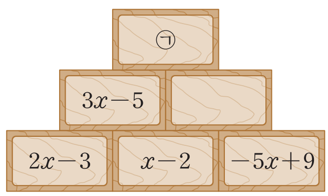
(ㄴ) 다항식 $-x^2-4x+5$에서 x의 계수는 4이다.

(ㄷ) 다항식 x^2-2x+1의 차수는 2이다.

05 오른쪽은 어느 떡볶이 가게의 차림표이다. 떡볶이 세트 하나에 만두와 튀김을 추가하여 총 만두 5개, 튀김 7개가 들어간 떡볶이를 먹었을 때, 지불해야 할 금액을 a를 사용한 식으로 나타내시오.



06 다음 그림에서 위에 있는 쌓기나무에 적힌 식은 바로 아래에 있는 두 쌓기나무에 적힌 식을 더한 것이다. ㉠에 알맞은 식을 구하시오.



07 x에 대한 일차방정식 $ax+3=-2$의 해가 자연수가 되도록 하는 정수 a의 값을 모두 구하시오. (단, $a\neq 0$)

08 x에 대한 일차방정식 $3(x-4)=\frac{1}{2}x-2a$의 해가 $x=2$일 때, a의 값을 구하시오.

09 방정식 $0.9x-1.8=0.7x+1$의 해를 $x=a$, 방정식 $\frac{1}{9}x+\frac{5}{6}=\frac{3}{2}$의 해를 $x=b$라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

10 길이가 72 cm인 철사를 구부려서 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 $1:3$인 직사각형을 만들었다. 이 직사각형의 넓이를 구하시오. (단, 철사가 겹치는 부분은 없다.)

11 동생이 오후 1시에 집을 나선 지 5분 후에 형이 동생을 따라나섰다. 동생과 형이 각각 시속 3 km, 시속 4 km로 걸을 때, 형과 동생이 만나는 시각을 구하시오.

12 욕조에 물을 가득 채우는 데 수도관 A를 이용하면 20분이 걸리고, 수도관 B를 이용하면 15분이 걸린다고 한다. 두 수도관 A, B를 동시에 이용하면 욕조에 물을 가득 채우는 데 몇 분이 걸리는지 구하시오.

서술형

13 기온이 $x\,^{\circ}\mathrm{C}$일 때, 공기 중에서 소리의 속력은 초속 $(331.5+0.6x)$ m이다. 기온이 $15\,^{\circ}\mathrm{C}$일 때, 10초 동안 소리가 전달되는 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

14 다항식 $\frac{2x-1}{4}-\frac{x+2}{3}$를 간단히 했을 때, x의 계수와 상수항의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

15 x에 대한 일차방정식 $3x-2(-1-a)=3$에서 a의 부호를 잘못 보고 풀었더니 해가 $x=1$이었다. 이때 주어진 방정식의 해를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 재훈이는 편의점에서 한 개에 1000원인 흰 우유와 한 개에 1200원인 초코 우유를 합하여 총 15개의 우유를 샀다. 20000원을 내고 4200원을 거슬러 받았을 때, 재훈이가 산 흰 우유의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 다양한 상황을 문자를 사용한 식으로 나타낼 수 있다.			
❷ 식의 값을 구할 수 있다.			
❸ 일차식의 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다.			
❹ 방정식과 그 해의 의미를 알고, 등식의 성질을 이해한다.			
❺ 일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.			

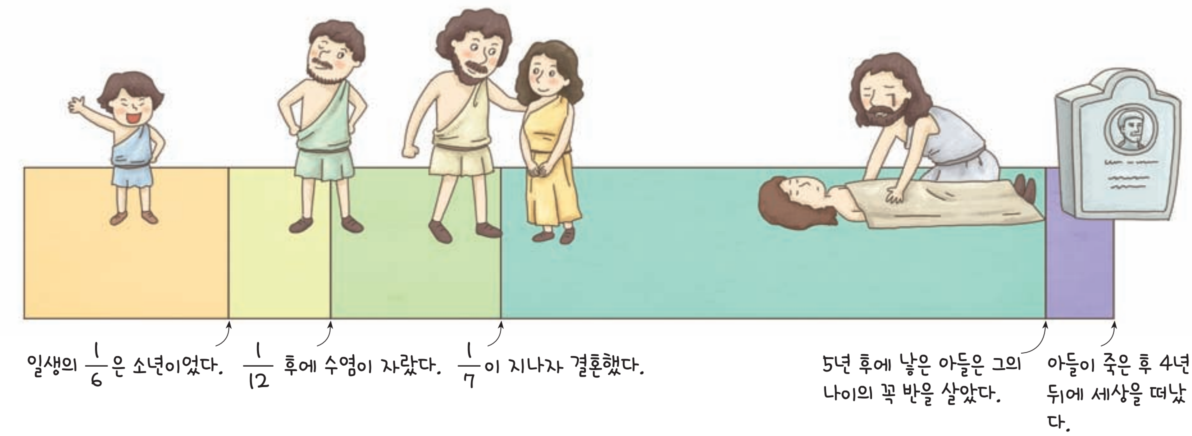
보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

나의 일생 그리기

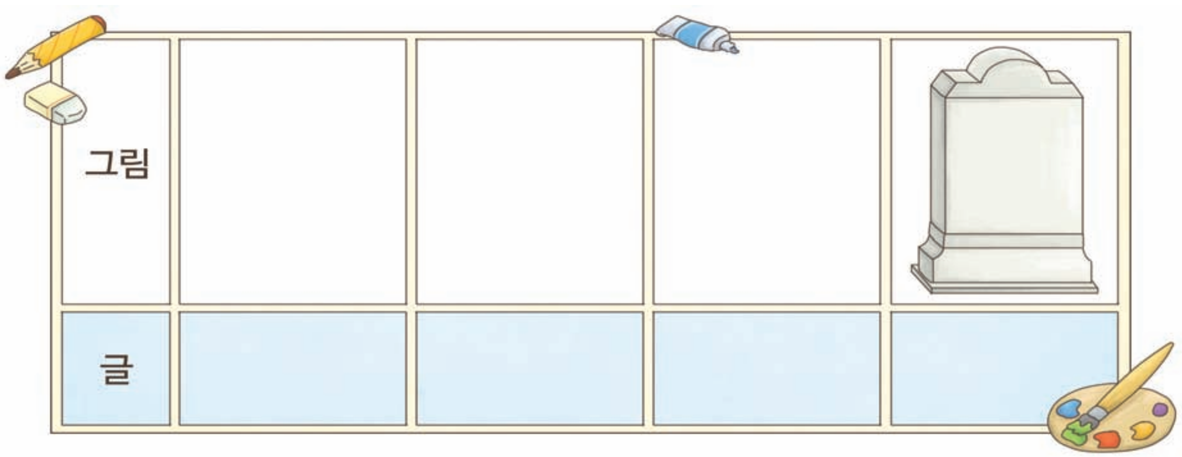
대수학의 아버지라 불리는 고대 그리스 수학자 디오판토스(Diophantos, 200?~284?)는 알려진 바에 의하면 미지수를 문자로 쓰기 시작한 사람이다.

디오판토스가 언제 태어나고 죽었는지에 대한 정확한 기록은 없지만 그가 죽은 후 그의 친한 친구가 다음과 같이 디오판토스의 일생에 대한 수수께끼를 만들었다고 한다. 이를 통해 디오판토스의 일생을 추측할 수 있다. (출처: Theoni Pappas, 『The Joy of Mathematics』)



과제 1 디오판토스가 사망한 나이를 방정식을 이용하여 구해 보자.

과제 2 자신의 일생을 계획하여 위의 수수께끼와 같이 그림과 글로 나타내어 보자. 짝과 바꾸어 서로의 예상 수명을 방정식을 이용하여 구해 보자.



세상 속 수학 Math X History

모르는 것을 안다고 가정하면

이집트 문명을 밝히는 데 중요한 역할을 한 것은 파피루스(papyrus)이다. 파피루스는 나일 강가에서 많이 자라는 풀의 이름으로, 이 풀의 줄기를 일정한 길이로 자르고 얇게 베어 물에 담가 두었다가 서로 엇갈리게 놓고 망치로 두들겨 글을 적을 수 있도록 두루마리 형태로 만든 것이다.

이집트의 파피루스 중에서 가장 대표적인 것은 『린드 파피루스』로, 이 책에는 87개의 문제가 실려 있으며 덧셈, 뺄셈, 등호 등의 기호도 사용되었다.

『린드 파피루스』에는 다음과 같은 문제와 그 풀이가 실려 있다.

> 벽돌공, 나는 빨리 집을 짓고 싶네. 난 300장의 벽돌만 있으면 되네. 자네는 하루에 벽돌 300장을 만들 수 있고, 자네 아들은 하루에 200장을 만들 수 있고, 자네 사위는 하루에 250장을 만들 수 있네. 셋이 모두 일하면 벽돌 300장을 만드는 데 얼마나 걸리지?

풀이 2일이 필요하다고 가정해 보자.
2일 동안 벽돌공은 600장, 아들은 400장, 사위는 500장을 만들어서 모두 1500장의 벽돌을 만들 수 있다.
1500은 300의 5배이므로 같은 비율을 유지하면 300장을 만들기 위해서는 $\frac{2}{5}$일이 필요하다.

이와 같이 미지수를 적당한 수로 가정하고 문제에 적용시켰을 때 생기는 모순을 조정하여 답을 구할 수도 있다.

한편 방정식을 이용하면 다음과 같이 벽돌 300장을 만드는 데 며칠이 걸리는지 구할 수 있다.

$$300x+200x+250x=300, \qquad x=\frac{300}{750}=\frac{2}{5}\text{(일)}$$

(출처: Eugene C. Boman, 『False Position, Double False Position and Cramer's Rule』)

『린드 파피루스』

진로 탐색 **고고학자** | 인류가 남긴 유적과 유물을 발굴하고 분석해 과거의 역사, 문화, 생활 방식 등을 연구한다.

III 그래프와 비례

배운 내용

초 3~4
- 꺾은선그래프

초 5~6
- 규칙과 대응

중 1
- 문자의 사용

이 단원의 내용

1. **좌표평면과 그래프**
   - 순서쌍과 좌표
   - 그래프
2. **정비례와 반비례**
   - 정비례
   - 반비례

배울 내용

중 2
- 일차함수와 그래프

중 3
- 이차함수와 그래프


자동차가 달리는 시간이 길어질수록 이동 거리는 늘어나고 열기구의 높이가 낮아질수록 지상에 있는 사물이 더 크게 보인다. 이와 같이 **한 양이 변함에 따라 다른 양이 따라서 변하는 관계**를 주변에서 쉽게 찾을 수 있다.
이 단원에서는 변하는 두 양 사이의 관계를 그래프로 나타내고, 정비례와 반비례를 알아본다.

1 좌표평면과 그래프

준비 학습

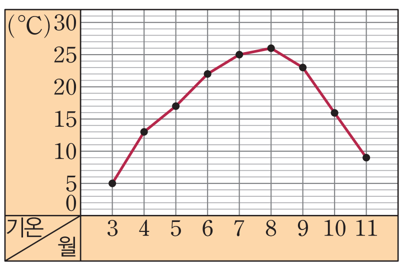
꺾은선그래프

❶ 오른쪽 그림은 어느 해 우리나라 중부 지역의 3월부터 11월까지의 평균 기온을 나타낸 꺾은선그래프이다. 다음에 답하시오.

(1) 5월의 평균 기온을 구하시오.

(2) 7월의 평균 기온과 11월의 평균 기온의 차를 구하시오.

(3) 평균 기온이 가장 높은 달과 가장 낮은 달을 구하시오.



1 순서쌍과 좌표

순서쌍과 좌표를 이해한다.

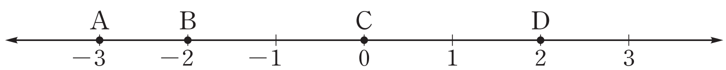
수직선 위의 점의 좌표

생각톡

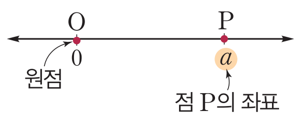
공원, 도서관, 서우네 집, 학교가 다음 그림과 같이 일직선상에 있다.

탐구 서우네 집의 위치를 기준으로 도서관의 위치를 -2라고 할 때, 학교의 위치와 공원의 위치를 나타내는 수를 말해 보자.

위의 생각톡에서 공원, 도서관, 집, 학교의 위치를 나타내는 점을 각각 A, B, C, D라고 하자. 수직선에서 점 C가 나타내는 수를 0이라고 하면 세 점 A, B, D가 나타내는 수는 각각 -3, -2, 2이므로 네 점을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



이와 같이 수직선 위의 점이 나타내는 수를 그 점의 **좌표**라 하고, 점 P의 좌표가 a일 때 이것을 기호로 P(a)와 같이 나타낸다. 특히 좌표가 0인 점을 **원점**이라 하고 O로 나타낸다. 즉 O(0)이다.

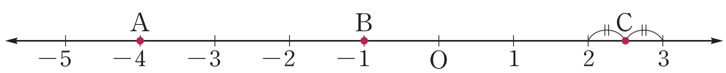


원점을 나타내는 기호 O는 origin의 첫 글자이다.

보기 위의 수직선에서 세 점 A, B, D의 좌표는 각각 -3, -2, 2이고, 이것을 각각 기호로 나타내면

A(-3), B(-2), D(2)

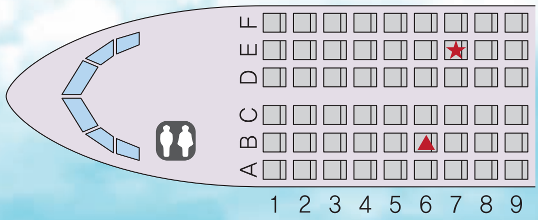
문제 1 **다음 수직선 위의 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 기호로 나타내시오.**



좌표평면 위의 점의 좌표

생각톡

다음 그림은 어느 항공기의 좌석 배치도의 일부이다.



탐구 ① ★표 한 좌석의 위치를 7E라고 할 때, ▲표 한 좌석의 위치를 말해 보자.

탐구 ② 위치가 4F인 좌석에 ●표를 해 보자.

대전광역시는 대략 동경 127°, 북위 36°에 위치하는데 이 위치를 동경과 북위를 순서대로 써서 (127, 36)으로 나타낼 수 있다.

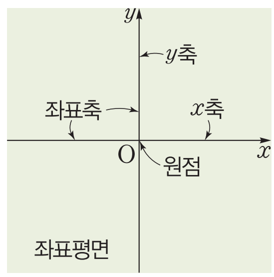
이와 같이 순서를 생각하여 두 수를 짝 지어 나타낸 쌍을 **순서쌍**이라고 한다.

순서쌍은 두 수의 순서를 정하여 나타낸 것이므로 (127, 36)과 (36, 127)은 서로 다르다.

이제 평면 위의 점의 위치를 순서쌍을 이용하여 나타내어 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 수직선을 점 O에서 서로 수직으로 만나도록 그린다.

이때 가로의 수직선을 **x축**, 세로의 수직선을 **y축**이라 하고, x축과 y축을 통틀어 **좌표축**이라고 한다. 또 두 좌표축이 그려진 평면을 **좌표평면**이라 하고 두 좌표축이 만나는 점 O를 좌표평면의 **원점**이라고 한다.



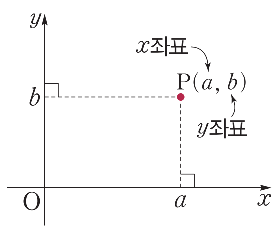
좌표평면 위의 한 점 P에서 x축, y축에 각각 수선을 내려 이 수선과 x축, y축이 만나는 점이 나타내는 수가 각각 a, b일 때, 순서쌍 (a, b)를 점 P의 **좌표**라고 한다.

원점 O의 좌표는 (0, 0)이다.

점 P의 좌표가 (a, b)일 때, 이것을 기호로

$$P(a, b)$$

와 같이 나타내고 a를 점 P의 **x좌표**, b를 점 P의 **y좌표**라고 한다.



데카르트(Descartes, R., 1596~1650)는 처음으로 평면에 좌표를 도입했다.

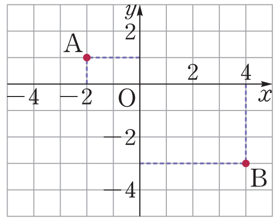
보기 오른쪽 좌표평면에서

❶ 점 A의 x좌표는 -2, y좌표는 1이므로

$A(-2,\ 1)$

❷ 점 B의 x좌표는 4, y좌표는 -3이므로

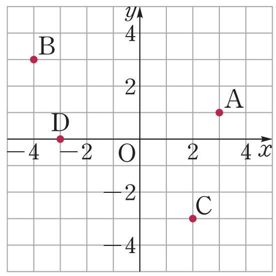
$B(4,\ -3)$



문제 2 **오른쪽 좌표평면에 대하여 다음에 답하시오.**

(1) 네 점 A, B, C, D의 좌표를 각각 기호로 나타내시오.

(2) 세 점 $P(-1,\ 4)$, $Q(-2,\ -3)$, $R(0,\ 2)$를 좌표평면 위에 나타내시오.



찾아보기

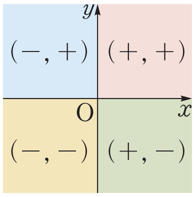
규모가 큰 주차장에는 건물의 기둥에 알파벳과 숫자를 조합한 기호가 표시되어 있어 주차한 차의 위치를 쉽게 찾을 수 있다.
이와 같이 실생활에서 위치를 쉽게 나타내기 위해 기호를 사용하는 예를 찾아보자.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면은 좌표축에 의하여 네 부분으로 나누어지는데 그 네 부분을 각각 **제1사분면**, **제2사분면**, **제3사분면**, **제4사분면**이라고 한다.

사분면(四分面)이란 '네 개로 나뉜 면'이라는 뜻이다.

참고 원점과 좌표축은 어느 사분면에도 포함되지 않는다.

각 사분면 위의 점의 x좌표, y좌표의 부호는 다음과 같다.



좌표 \ 사분면	제 1 사분면	제 2 사분면	제 3 사분면	제 4 사분면
x좌표	+	−	−	+
y좌표	+	+	−	−

문제 3 다음 점은 어느 사분면 위에 있는지 말하시오.

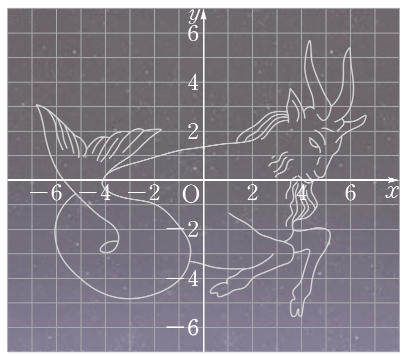
(1) $\mathrm{A}(2,\ -5)$ (2) $\mathrm{B}(-3,\ -4)$

(3) $\mathrm{C}(-1,\ 7)$ (4) $\mathrm{D}\left(2,\ \dfrac{5}{3}\right)$

표현하기

염소자리는 가을철 남쪽 밤하늘에서 볼 수 있는 별자리로 상반신은 염소, 하반신은 물고기 모양이다. 좌표평면 위에 다음 순서쌍을 좌표로 하는 점을 차례대로 선분으로 연결하여 염소자리를 완성해 보자.

$(1,\ -4) \rightarrow (2,\ -3) \rightarrow \left(5,\ \dfrac{5}{2}\right)$
$\rightarrow \left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{7}{2}\right) \rightarrow \left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$
$\rightarrow \left(-\dfrac{7}{2},\ \dfrac{3}{2}\right) \rightarrow \left(-5,\ \dfrac{3}{2}\right)$
$\rightarrow (-6,\ 2) \rightarrow \left(-3,\ -\dfrac{3}{2}\right)$
$\rightarrow (1,\ -4)$

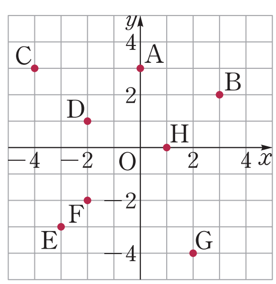


확인하기

1 오른쪽 좌표평면에서 다음에 해당하는 점을 모두 찾고 좌표를 기호로 나타내시오.

(1) 제2사분면 위의 점

(2) x좌표는 양수이고 y좌표는 음수인 점



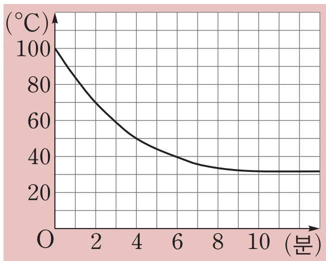
2 그래프

다양한 상황을 그래프로 나타내고, 주어진 그래프를 해석할 수 있다.

그래프

생각톡

차는 종류에 따라 가장 맛있게 마실 수 있는 물의 온도가 다른데 홍차는 90 °C 이상, 녹차는 70 °C 정도의 물이 가장 적당하다고 한다.
다음 그림은 차를 마시기 위해 끓인 물을 식히면서 물의 온도를 측정하여 나타낸 것이다.



탐구 물을 식히기 시작한 지 2분, 4분, 6분 후의 물의 온도를 말해 보자.

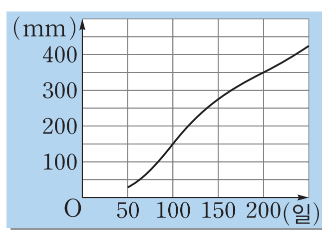
위의 생각톡에서 물을 식히는 시간이 2분, 4분, 6분, …으로 달라짐에 따라 물의 온도는 70 °C, 50 °C, 40 °C, …로 달라진다. 이때 시간을 x분, 물의 온도를 y °C라고 하면 x와 y는 여러 가지 값을 나타냄을 알 수 있다.

x, y와 같이 여러 가지로 변하는 값을 나타내는 문자를 **변수**라고 한다.

변수와 달리 일정한 값을 갖는 수나 문자를 상수라고 한다.

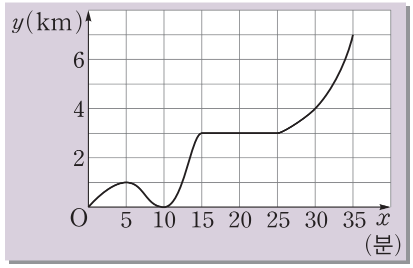
한편 위의 생각톡의 그림에서 x축은 시간, y축은 온도를 나타내므로 이 그림은 시간과 온도의 관계를 나타냄을 알 수 있다. 이와 같이 두 변수 사이의 관계를 좌표평면 위에 그림으로 나타낸 것을 **그래프**라고 한다.

문제 1 **오른쪽은 어느 산모의 임신 기간에 따른 태아의 크기를 나타낸 그래프이다. 임신 후 100일이 지났을 때의 태아의 크기를 구하시오.**



문제 2 규호가 자전거를 타고 출발한 지 x분이 지났을 때, 출발점으로부터 떨어진 거리를 y km라고 하자. x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같을 때, 다음에 답하시오.

(단, 자전거는 직선 도로로만 이동한다.)



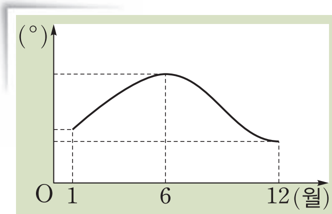
(1) 출발한 지 30분이 지났을 때 규호가 출발점으로부터 몇 km만큼 떨어져 있는지 구하시오.

(2) 출발점으로 되돌아오기 시작한 지점은 출발점에서 몇 km만큼 떨어져 있는지 구하시오.

(3) 도중에 몇 분 동안 멈추어 있었는지 구하시오.

그래프를 이용하면 두 양 사이의 증가와 감소 등의 변화를 쉽게 파악할 수 있다.

예를 들어 오른쪽 그림은 어느 지역의 1년 동안의 태양의 남중 고도를 나타낸 그래프인데, 1월부터 하지가 속한 6월까지는 남중 고도가 증가하고 그 이후부터는 감소하여 동지가 속한 12월에 남중 고도가 가장 낮음을 알 수 있다.



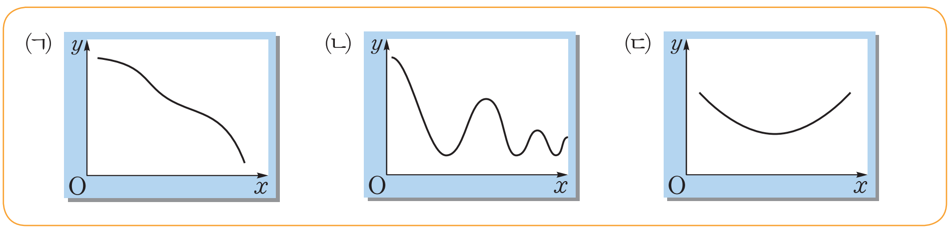
태양이 남쪽 하늘의 중앙에 왔을 때, 태양의 고도를 태양의 남중 고도라고 한다.

문제 3 다음 설명에 가장 알맞은 그래프를 찾으시오.

(1) 아침 6시부터 저녁 6시까지 시각 x에 따른 나무의 그림자의 길이 y

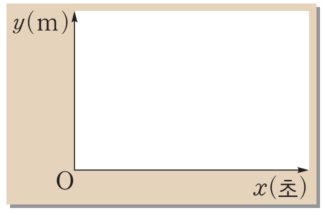
(2) 휴대 전화를 사용한 시간 x에 따른 남은 배터리의 양 y

(3) 번지 점프를 한 사람의 경과 시간 x에 따른 지면으로부터의 높이 y



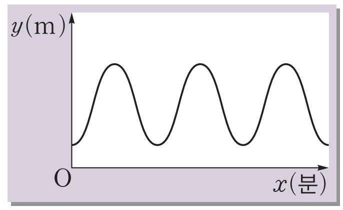
문제 4 어떤 선수가 일정한 간격으로 놓인 허들 3개를 넘는 장애물 달리기를 할 때, 출발한 지 x초 후의 지면으로부터 가장 가까운 신체까지의 높이를 y m라고 하자. 이때 x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내시오.

(단, 선수의 속력은 일정하다.)



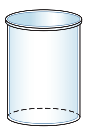
설명하기

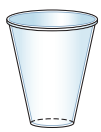
대관람차가 정지하고 있을 때, 지면에 가장 가까운 칸을 A라 하고 대관람차가 출발한 후 x분이 지났을 때, 지면으로부터 A칸의 높이를 y m라고 하자. 이때 x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.

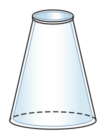


이와 같이 실생활에서 같은 모양이 반복되는 그래프로 표현할 수 있는 상황을 찾고, 그 변화를 설명해 보자.

예제 1 다음과 같은 세 가지 모양의 컵에 시간당 일정한 양의 물을 넣는다고 할 때, 경과 시간 x에 따른 물의 높이 y의 변화를 그래프로 나타내시오.

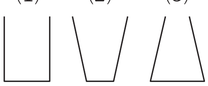
(1) 

(2) 

(3) 

세 컵의 단면은 각각 다음과 같다.

(1) (2) (3)

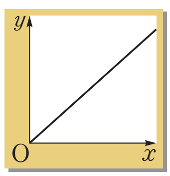


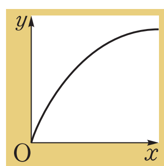
풀이 (1) 컵의 폭이 일정하므로 물의 높이도 일정하게 증가한다.

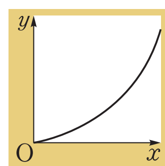
(2) 컵의 폭이 위로 갈수록 넓어지므로 물의 높이가 처음에는 빠르게 증가하다가 점점 느리게 증가한다.

(3) 컵의 폭이 위로 갈수록 좁아지므로 물의 높이가 처음에는 천천히 증가하다가 점점 빠르게 증가한다.

이상에서 각각의 그래프는 다음과 같다.

(1) 

(2) 

(3) 

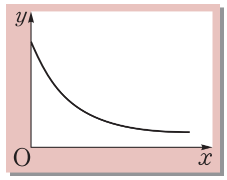
답 풀이 참조

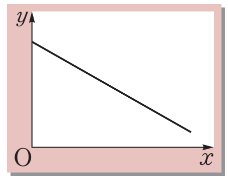
문제 5 **제품 출시 후 경과 시간 x에 따른 가격을 y라고 할 때, 다음 설명에 가장 알맞은 그래프를 찾으시오.**

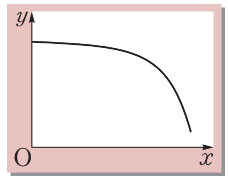
(1) 가격이 일정한 비율로 하락한다.

(2) 가격이 처음에는 천천히 하락하다가 점점 빠르게 하락한다.

(3) 가격이 처음에는 빠르게 하락하다가 점점 천천히 하락한다.

(ㄱ)


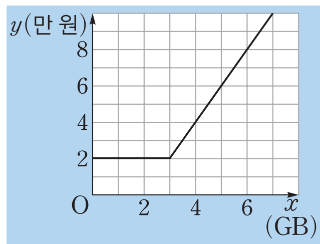
(ㄴ)


(ㄷ)


창의·융합

문제 6 **어느 통신사에서는 데이터 요금제를 기본요금과 추가 요금으로 구성한다. 데이터를 x GB 사용할 때의 요금을 y만 원이라고 할 때, 물음에 답하시오.**

(1) 다음에서 설명하는 요금제를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같을 때, $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.



> 기본요금 $\square$만 원에 데이터 $\square$ GB를 기본으로 제공하고, 기본 제공량을 모두 사용한 후에는 1 GB당 $\square$만 원씩 요금이 추가된다.

(2) 다음에서 설명하는 요금제를 그래프로 나타내시오.

> 기본요금 3만 원에 데이터 2 GB를 기본으로 제공하고, 기본 제공량을 모두 사용한 후에는 1 GB당 1만 원씩 요금이 추가된다.

확인하기

1 학교 수업이 끝나고 집으로 돌아갈 때, 경과 시간 x분에 따른 학교에서 떨어진 거리를 y m라고 하자. 다음 상황을 그래프로 나타내시오.

(1) 도중에 잠시 문구점에 들렀다가 다시 집으로 걸었다.

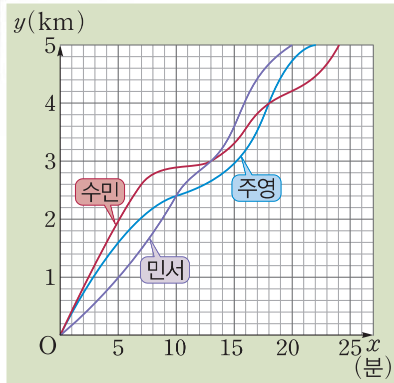
(2) 도중에 학교로 돌아갔다가 다시 집으로 걸었다.

수학 역량 플러스

그래프로 본 마라톤 대회

창의·융합 의사소통

이동 시간과 이동 거리 사이의 관계를 그래프로 나타내면 특정 시각까지 이동한 거리나 특정 거리에 도착할 때까지 걸린 시간 등 여러 가지 사실을 파악할 수 있다. 또한 시간과 거리에 대한 여러 개의 그래프를 함께 나타내면 서로의 위치나 빠르기 등을 쉽게 비교할 수 있다.



오른쪽은 5 km 단축 마라톤 대회에 참가한 민서, 주영, 수민이가 x분 동안 달린 거리를 y km라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타낸 것이다.

활동 1 위의 그래프에서 세 사람에 대하여 알 수 있는 사실을 말해 보자.

민서	주영	수민

활동 2 다음 단어를 이용하여 위의 마라톤 대회를 중계해 보자.

선두 | 역전 | 골인 | 우승 | 기록

정답 및 풀이 287쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 수직선 위의 점의 좌표

105쪽

(1) 수직선 위의 점이 나타내는 수를 그 점의 $\boxed{\quad}$라고 한다.

(2) 수직선 위에서 점 P의 좌표가 a일 때, 이것을 기호로 $\boxed{\quad}$와 같이 나타낸다.

❷ 좌표평면 위의 점의 좌표

106쪽

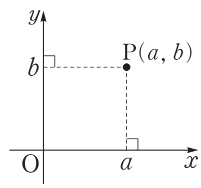
(1) $\boxed{\quad}$: 순서를 생각하여 두 수를 짝 지어 나타낸 쌍

(2) 오른쪽 그림에서

① $\boxed{\quad}$: 가로의 수직선 ┐
② $\boxed{\quad}$: 세로의 수직선 ┘→ 좌표축

③ $\boxed{\quad}$: 두 좌표축이 그려진 평면

④ $\boxed{\quad}$: 두 좌표축이 만나는 점 O



⑤ 점 P$(a,\ b)$에서 a를 점 P의 $\boxed{\quad}$, b를 점 P의 $\boxed{\quad}$라고 한다.

❸ 그래프

109쪽

(1) $\boxed{\quad}$: 여러 가지로 변하는 값을 나타내는 문자

(2) $\boxed{\quad}$: 두 변수 사이의 관계를 그림으로 나타낸 것

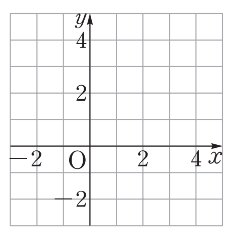
표준 문제

01 수직선 위의 두 점 A(-5), B(3)의 한가운데에 위치한 점을 M이라고 할 때, 점 M의 좌표를 기호로 나타내시오.

서술형 **02** 세 점 A$(-1,\ 4)$, B$(-1,\ -1)$, C$(3,\ 2)$에 대하여 다음에 답하시오.

(1) 주어진 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC를 오른쪽 좌표평면 위에 나타내시오.

(2) 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

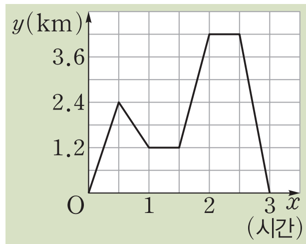


03 두 점 $A(-3,\ 3)$, $B(-3,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 C, D의 좌표를 구하시오. (단, 원점 O는 정사각형 ABCD의 내부에 있다.)

추론 **04** 점 $(a,\ b)$가 제4사분면 위의 점일 때, 다음 점은 어느 사분면 위에 있는지 말하시오.

(1) $A(a,\ -b)$ (2) $B(-a,\ b)$ (3) $C(-a,\ -b)$

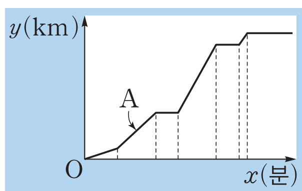
서술형 **05** 정환이가 열기구를 타고 지면에서 출발하여 위아래로 움직일 때, 출발한 지 x시간 후의 지면으로부터의 높이를 y km라고 하자. x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같을 때, 다음을 구하시오.
(단, 열기구는 지면과 수직인 방향으로만 움직인다.)



(1) 지면에 다시 내려올 때까지 걸린 시간

(2) 지면에 다시 내려올 때까지 이동한 거리

06 재호 어머니가 자동차를 타고 출발하여 x분 동안 운전한 거리를 y km라고 할 때, x와 y 사이의 관계를 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다. 다음 중에서 A구간에 대한 설명으로 가장 적절한 것은?



① 가장 막히는 길을 통과하고 있다.

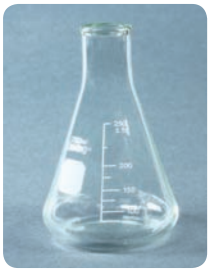
② 주유소에서 기름을 넣고 있다.

③ 일정한 속력으로 달리고 있다.

④ 가장 빠른 속력으로 달리고 있다.

⑤ 신호 대기 중이다.

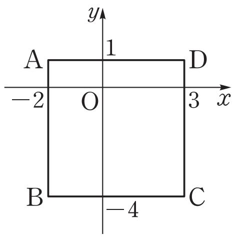
07 오른쪽과 같은 삼각 플라스크에 물을 넣는다고 할 때, 넣은 물의 양 x에 따른 물의 높이 y의 변화를 그래프로 나타내시오.



도전 문제

추론 **08** 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 사각형 ABCD가 있다. 점 P(a, b)가 사각형 ABCD의 변 위를 움직일 때, $a-b$의 값 중에서 가장 큰 값을 구하시오.

(단, 사각형 ABCD의 네 변은 좌표축과 평행하다.)

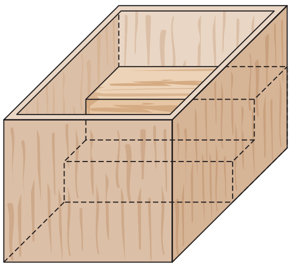


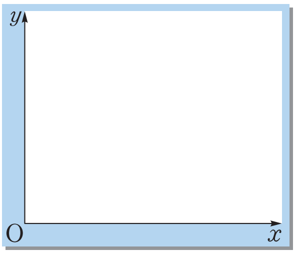
서술형 **09** 두 수 a, b에 대하여 $ab<0$, $a<b$일 때, 다음에 답하시오.

(1) a, b의 부호를 구하시오.

(2) 점 $\left(a-b, -\dfrac{a}{b}\right)$는 어느 사분면 위에 있는지 말하시오.

10 다음 그림과 같이 계단이 있는 나무 욕조에 물이 가득 채워져 있을 때, 시간당 일정한 양의 물을 빼려고 한다. 경과 시간 x에 따른 물의 높이 y의 변화를 그래프로 나타내시오.





2 정비례와 반비례

준비 학습

두 양의 대응 관계

1 정삼각형의 한 변의 길이를 x cm, 둘레의 길이를 y cm라고 할 때, 다음 표를 완성하시오.

x	1	2	3	4	5	…
y						…

문자의 사용

2 다음을 문자를 사용한 식으로 나타내시오.

(1) 1권에 1000원인 공책 x권의 가격

(2) 50 g짜리 초콜릿 a개와 30 g짜리 초콜릿 b개의 무게의 합

1 정비례

정비례 관계를 이해하고, 그 관계를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있다.

정비례 관계

생각톡

여러 가지 감지기와 제어 시스템을 인공 지능으로 조절하여 운행하는 자율 주행 자동차는 운전자가 차량을 조작하지 않아도 스스로 주행할 수 있다.

탐구 ① 자율 주행 자동차가 시속 30 km의 일정한 속력으로 달릴 때, 다음 표를 완성해 보자.

달린 시간(시간)	1	2	3	4	…
이동 거리(km)	30				…

탐구 ② 위의 표에서 달린 시간이 2배, 3배, 4배가 되면 이동 거리는 어떻게 변하는지 말해 보자.

위의 생각톡에서 자율 주행 자동차가 달린 시간이 2배, 3배, 4배가 되면 이동 거리도 2배, 3배, 4배가 됨을 알 수 있다.

달린 시간(시간)	1	2	3	4	…
이동 거리(km)	30	60	90	120	…

이와 같이 두 변수 x, y에서 x가 2배, 3배, 4배, …가 됨에 따라 y도 2배, 3배, 4배, …가 되는 관계가 있을 때 y는 x에 **정비례**한다고 한다.

위의 생각톡에서 자율 주행 자동차가 달린 시간을 x시간, 이동 거리를 y km라고 할 때, y는 x에 정비례하고 x와 y 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	2	3	…	x
y	30×1	30×2	30×3	…	$30\times x$

위의 표에서 $y=30x$임을 알 수 있다.

y가 x에 정비례할 때, x에 대한 y의 비율 $\frac{y}{x}$는 일정하다.

일반적으로 y가 x에 정비례하면 $y=ax$ (단, $a\neq0$)가 성립한다. 또 x와 y 사이에 $y=ax$ (단, $a\neq0$)가 성립하면 y는 x에 정비례한다.

$y=ax$
일정한 수

문제 1 **다음에서 y가 x에 정비례하는 것을 모두 찾으시오.**

(1) 1개에 700원인 아이스크림 x개의 가격 y원
(2) 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 둘레의 길이 y cm
(3) 나이가 x살인 동생보다 3살 많은 형의 나이 y살

주어진 조건을 만족시키는 정비례 관계를 식으로 나타내어 보자.

예제 1 **y가 x에 정비례하고 $x=3$일 때 $y=12$이다. 이때 y를 x에 대한 식으로 나타내시오.**

풀이 y가 x에 정비례하므로 구하는 식을 $y=ax$라고 하자. (단, $a\neq0$)
이 식에 $x=3$, $y=12$를 대입하면
$12=3a$, $a=4$
따라서 구하는 식은 $y=4x$

답 $y=4x$

문제 2 **y가 x에 정비례하고 다음 조건을 만족시킬 때, y를 x에 대한 식으로 나타내시오.**

(1) $x=2$일 때 $y=-8$
(2) $x=6$일 때 $y=4$

문제 해결
문제 3 **30년생 소나무 한 그루가 1년 동안 흡수하는 이산화 탄소의 양은 6.6 kg이라고 한다. 다음에 답하시오.**

(1) 30년생 소나무 x그루가 1년 동안 흡수하는 이산화 탄소의 양을 y kg이라고 할 때, y를 x에 대한 식으로 나타내시오.
(2) 1년 동안 이산화 탄소 165 kg을 흡수하려면 30년생 소나무가 몇 그루 필요한지 구하시오.

정비례 관계의 그래프

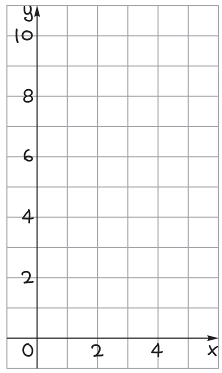
생각톡

어느 매장에서는 행사 기간 중 에어컨 1대가 판매될 때마다 선풍기 2대씩을 자선 단체에 기부한다고 한다.

탐구 ① 판매된 에어컨을 x대, 기부한 선풍기를 y대라고 할 때, 다음 표를 완성해 보자.

x	1	2	3	4	5
y	2				
(x, y)	$(1, 2)$				

탐구 ② 탐구 ①에서 구한 5개의 순서쌍을 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보자.

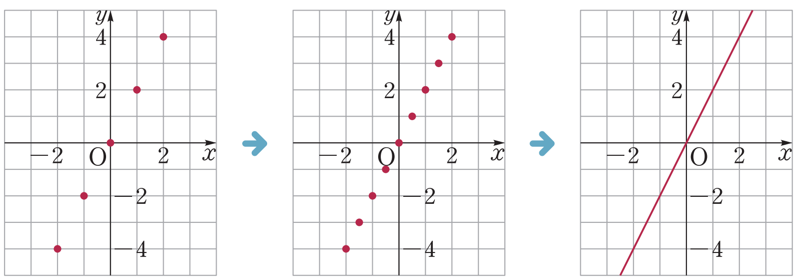


정비례 관계를 그래프로 나타내어 보자.

정비례 관계 $y=2x$에서 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, x, y의 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.

또 x의 값의 간격을 점점 작게 하면 [그림 2]와 같이 점들이 촘촘하게 되고, x의 값이 모든 수일 때에는 [그림 3]과 같이 원점을 지나는 직선이 된다.

이 직선이 정비례 관계 $y=2x$의 그래프이다.

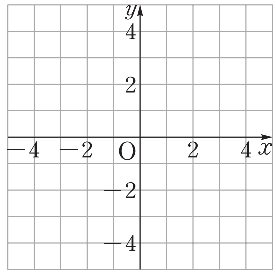


[그림 1] [그림 2] [그림 3]

y가 x에 정비례할 때, x의 값이 구체적으로 주어지지 않으면 x의 값은 모든 수로 생각한다.

일반적으로 x의 값이 모든 수일 때, 정비례 관계 $y=ax$ (단, $a\neq0$)의 그래프는 원점을 지나는 직선이다.

문제 4 **정비례 관계 $y=-2x$에 대하여 물음에 답하시오.**



(1) 다음 표를 완성하고 점 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내시오.

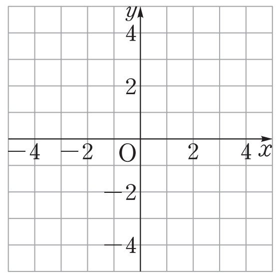
x	-2	-1	0	1	2
y					

(2) 다음 표를 완성하고 점 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내시오.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y									

(3) x의 값이 모든 수일 때, $y=-2x$의 그래프를 좌표평면 위에 그리시오.

문제 5 **다음 정비례 관계의 그래프를 그리시오.**



(1) $y=\frac{1}{2}x$

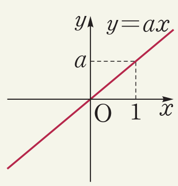
(2) $y=-x$

일반적으로 정비례 관계 $y=ax$ (단, $a\neq0$)의 그래프는 다음과 같은 성질을 갖는다.

정비례 관계 $y=ax$의 그래프

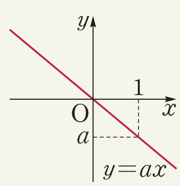
정비례 관계 $y=ax$ (단, $a\neq0$)의 그래프는 원점을 지나는 직선이다.

❶ $a>0$일 때



제1사분면, 제3사분면을 지난다.

❷ $a<0$일 때



제2사분면, 제4사분면을 지난다.

문제 6 **다음 정비례 관계의 그래프가 지나는 사분면을 모두 말하시오.**

(1) $y=7x$

(2) $y=-\frac{3}{5}x$

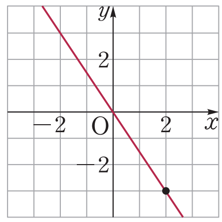
직선은 서로 다른 두 점을 곧게 이어서 그릴 수 있으므로 정비례 관계의 그래프는 원점과 그래프가 지나는 다른 한 점을 찾아 그릴 수 있다.

예제 2 **정비례 관계 $y=-\frac{3}{2}x$의 그래프를 그리시오.**

풀이 정비례 관계의 그래프는 원점을 지난다.

또 $x=2$일 때 $y=\left(-\frac{3}{2}\right)\times 2=-3$이므로 그래프는 점 $(2,\ -3)$을 지난다.

따라서 원점과 점 $(2,\ -3)$을 지나는 직선을 그리면 $y=-\frac{3}{2}x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

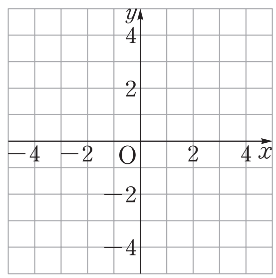


답 풀이 참조

문제 7 **다음 정비례 관계의 그래프를 그리시오.**

(1) $y=\frac{5}{3}x$

(2) $y=-\frac{1}{4}x$

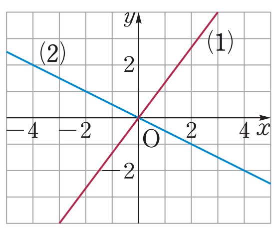


확인하기

1 y가 x에 정비례할 때, y를 x에 대한 식으로 나타내고 다음 표를 완성하시오.

x	-3	1	2	
y			-6	-12

2 정비례 관계 $y=ax$의 그래프가 오른쪽 그림의 (1), (2)와 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.



수학 역량 플러스

정비례 관계의 다양한 표현

창의·융합 의사소통

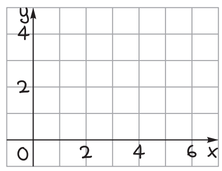
태양계 행성 중 하나인 화성은 영화와 소설의 소재로 많이 등장한다.

미국 항공 우주국(NASA)은 탐사 로봇인 큐리오시티를 화성에 착륙시켜 화성에 대한 여러 가지 정보를 수집하는데, 지구와 화성은 중력이 달라서 지구에서 900 kg인 큐리오시티의 무게가 화성에서는 300 kg이라고 한다. (출처: 『세계일보』, 2013. 8. 4.)

활동 1 지구에서 무게가 x kg인 물체의 화성에서의 무게를 y kg이라고 할 때, 다음을 완성해 보자.

x	90		3	1	…
y	30	3			…

y=________



달은 지구 주위를 도는 유일한 위성으로, 지구에서 가장 가까운 천체이다.

유럽 우주 기구(ESA)는 3D프린터 로봇을 이용하여 새로운 달 기지를 건설하겠다는 계획을 발표하였는데, 지구와 달은 중력이 달라서 지구에서 3 kg인 3D프린터의 무게가 달에서는 0.5 kg이라고 한다. (출처: 『연합뉴스』, 2014. 11. 10.)

활동 2 지구에서 무게가 x kg인 물체의 달에서의 무게를 y kg이라고 할 때, x와 y의 관계를 설명하고 표, 식, 그래프로 나타내어 보자.

2 반비례

반비례 관계를 이해하고, 그 관계를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있다.

반비례 관계

생각톡

호버 보드(hover board)는 미래를 배경으로 한 영화에서 개인용 이동 수단으로 사용된 공중 부양 보드로, 바퀴가 없는 스케이트보드 모양이다.

탐구 ① 호버 보드를 타고 12 km 떨어진 지점까지 일정한 속력으로 이동할 때, 다음 표를 완성해 보자.

속력 (km/h)	1	2	3	4	…
걸린 시간 (시간)	12				…

탐구 ② 위의 표에서 속력이 2배, 3배, 4배가 되면 걸린 시간은 어떻게 변하는지 말해 보자.

위의 생각톡에서 호버 보드의 속력이 2배, 3배, 4배가 되면 걸린 시간은 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{3}$배, $\frac{1}{4}$배가 됨을 알 수 있다.

속력 (km/h)	1	2	3	4	…
걸린 시간 (시간)	12	6	4	3	…

이와 같이 두 변수 x, y에서 x가 2배, 3배, 4배, …가 됨에 따라 y는 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{3}$배, $\frac{1}{4}$배, …가 되는 관계가 있을 때 y는 x에 **반비례**한다고 한다.

위의 생각톡에서 호버 보드의 속력을 시속 x km, 걸린 시간을 y시간이라고 할 때, y는 x에 반비례하고 x와 y 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	2	3	…	x
y	$\frac{12}{1}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{12}{3}$	…	$\frac{12}{x}$

위의 표에서 $y=\frac{12}{x}$임을 알 수 있다.

y가 x에 반비례할 때, x와 y의 곱 xy는 일정하다.

일반적으로 y가 x에 반비례하면 $y=\frac{a}{x}$(단, $a\neq 0$)가 성립한다. 또 x와 y 사이에 $y=\frac{a}{x}$(단, $a\neq 0$)가 성립하면 y는 x에 반비례한다.

$$y=\frac{a}{x}$$
일정한 수

문제 1 **다음에서 y가 x에 반비례하는 것을 모두 찾으시오.**

(1) 음료수 2 L를 x명이 똑같이 나누어 마실 때, 1명이 마시는 음료수의 양 y L

(2) 가로의 길이가 x cm이고 넓이가 7 cm^2인 직사각형의 세로의 길이 y cm

(3) 하루 중 낮의 길이가 x시간일 때 밤의 길이 y시간

주어진 조건을 만족시키는 반비례 관계를 식으로 나타내어 보자.

예제 1 **y가 x에 반비례하고 $x=4$일 때 $y=9$이다. 이때 y를 x에 대한 식으로 나타내시오.**

풀이 y가 x에 반비례하므로 구하는 식을 $y=\frac{a}{x}$라고 하자. (단, $a\neq 0$)

이 식에 $x=4$, $y=9$를 대입하면

$$9=\frac{a}{4}, \qquad a=36$$

따라서 구하는 식은 $\quad y=\frac{36}{x}$

답 $y=\frac{36}{x}$

문제 2 **y가 x에 반비례하고 다음 조건을 만족시킬 때, y를 x에 대한 식으로 나타내시오.**

(1) $x=6$일 때 $y=-4$

(2) $x=-7$일 때 $y=-5$

창의·융합

문제 3 **온도가 일정할 때, 기체의 부피는 압력에 반비례한다. 압력이 2기압일 때의 부피가 420 cm^3인 기체에 대하여 다음에 답하시오. (단, 온도는 일정하다.)**

(1) 압력이 x기압일 때의 기체의 부피를 y cm^3라고 할 때, y를 x에 대한 식으로 나타내시오.

(2) 이 기체의 부피가 280 cm^3일 때의 압력은 몇 기압인지 구하시오.

찾아보기 실생활에서 두 양이 정비례 관계인 것과 반비례 관계인 것의 예를 찾아 그 이유를 설명해 보자.

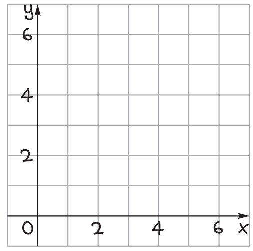
반비례 관계의 그래프

생각톡

물 6 L를 물통에 담아 사용하려고 한다.

탐구 ① 물 x L를 담을 수 있는 물통에 물을 가득 채우면 y번 담을 수 있다고 할 때, 다음 표를 완성해 보자.

x	1	2	3	6
y	6			
(x, y)	$(1, 6)$			



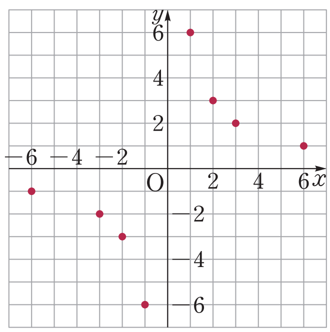
탐구 ② 탐구 ①에서 구한 4개의 순서쌍을 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보자.

반비례 관계를 그래프로 나타내어 보자.

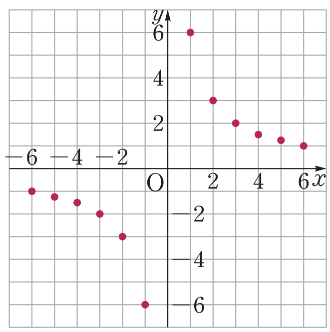
반비례 관계 $y=\frac{6}{x}$에서 x의 값이 -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6일 때, x, y의 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.

또 x의 값의 간격을 점점 작게 하면 [그림 2]와 같이 점들이 촘촘하게 되고, x의 값이 0이 아닌 모든 수일 때에는 [그림 3]과 같이 좌표축에 점점 가까워지면서 한없이 뻗어 나가는 한 쌍의 매끄러운 곡선이 된다.

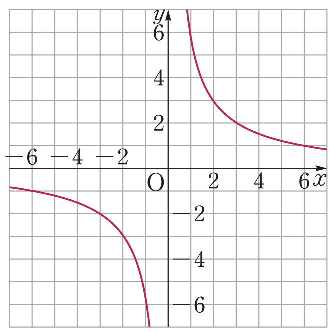
이 곡선이 반비례 관계 $y=\frac{6}{x}$의 그래프이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

y가 x에 반비례할 때, x의 값이 구체적으로 주어지지 않으면 x의 값은 0이 아닌 모든 수로 생각한다.

일반적으로 x의 값이 0이 아닌 모든 수일 때, 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$ (단, $a \neq 0$)의 그래프는 좌표축에 점점 가까워지면서 한없이 뻗어 나가는 한 쌍의 매끄러운 곡선이다.

문제 4 **반비례 관계 $y=-\frac{6}{x}$에 대하여 물음에 답하시오.**

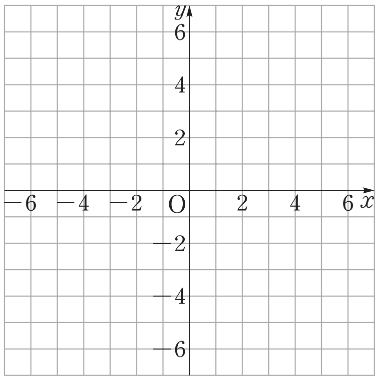
(1) 다음 표를 완성하고 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내시오.

x	-6	-3	-1	1	3	6
y						

(2) 다음 표를 완성하고 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내시오.

x	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6
y										

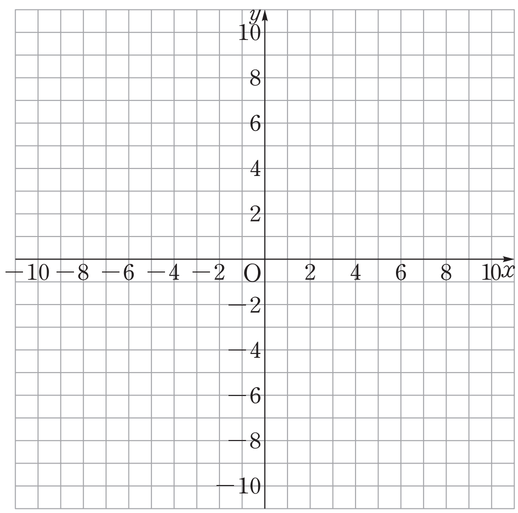
(3) x의 값이 0이 아닌 모든 수일 때, $y=-\frac{6}{x}$의 그래프를 좌표평면 위에 그리시오.



문제 5 **다음 반비례 관계의 그래프를 그리시오.**

(1) $y=\frac{8}{x}$

(2) $y=-\frac{10}{x}$

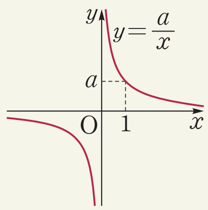


일반적으로 반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$ (단, $a\neq0$)의 그래프는 다음과 같은 성질을 갖는다.

반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프

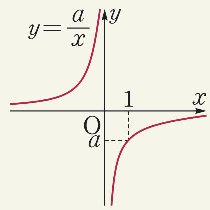
반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$ (단, $a\neq0$)의 그래프는 좌표축에 점점 가까워지면서 한없이 뻗어 나가는 한 쌍의 매끄러운 곡선이다.

❶ $a>0$일 때



제1사분면, 제3사분면을 지난다.

❷ $a<0$일 때



제2사분면, 제4사분면을 지난다.

문제 6 **다음 반비례 관계의 그래프가 지나는 사분면을 모두 말하시오.**

(1) $y=\dfrac{13}{x}$

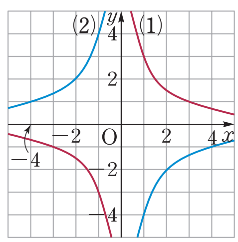
(2) $y=-\dfrac{7}{x}$

확인하기

1 y가 x에 반비례할 때, y를 x에 대한 식으로 나타내고 다음 표를 완성하시오.

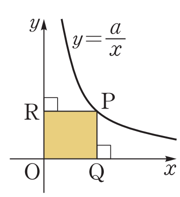
x	-3	1	2	
y	8			-6

2 반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프가 오른쪽 그림의 (1), (2)와 같을 때, 상수 a의 값을 구하시오.



사고력+ 오른쪽 그림과 같이 점 P가 반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점일 때, 사각형 OQPR의 넓이를 구하시오.

(단, O는 원점이고 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



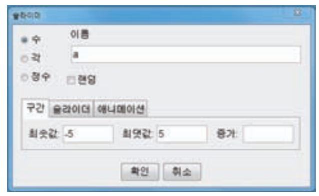
공학 도구 활용

컴퓨터로 그래프 탐구하기

정보 처리 · 추론

컴퓨터 프로그램을 이용하면 그래프를 더욱 정확하고 빠르게 그릴 수 있고, 그래프의 특징을 탐구하는 데에도 도움이 된다.

다음과 같이 슬라이더 도구를 이용하여 정비례 관계 $y=ax$ (단, $a\neq0$)의 그래프를 그려 보자.



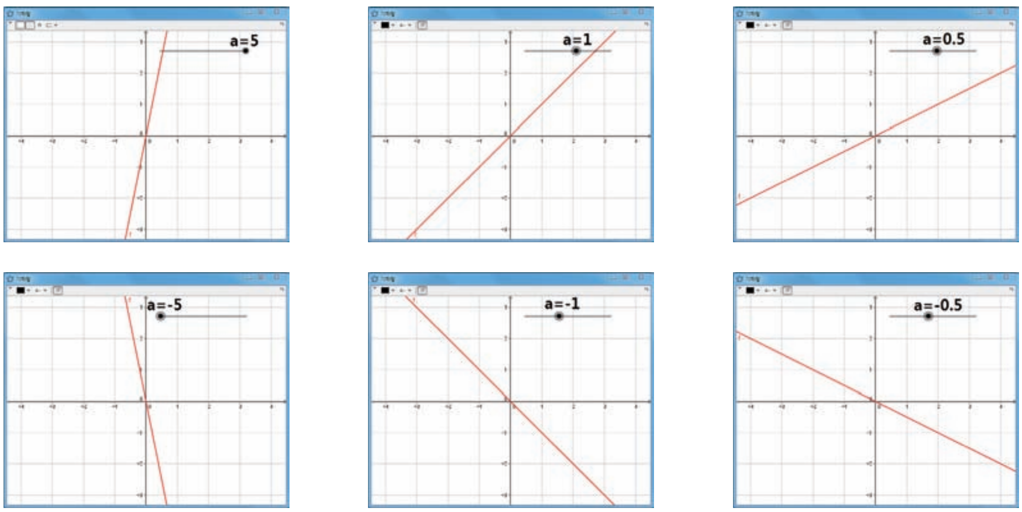
❶ [a=2]를 클릭하여 슬라이더를 선택한 후 기하창을 클릭한다.

❷ a의 값의 범위를 입력하고 [확인]을 클릭한다.

❸ 입력창에 ‘y=ax’를 입력한 후 [Enter ↵]를 누른다.

❹ 슬라이더의 점을 움직인다.

a의 값을 변화시킬 때, $y=ax$의 그래프는 다음과 같다.



활동 1 a의 값에 따라 $y=ax$의 그래프가 어떻게 변하는지 말해 보자. (단, $a\neq0$)

활동 2 위와 같은 방법으로 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 그리고, a의 값에 따라 그래프가 어떻게 변하는지 말해 보자. (단, $a\neq0$)

중단원 마무리

Ⅲ-2 정비례와 반비례

정답 및 풀이 289쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

1 정비례

118쪽

(1) 두 변수 x, y에서 x가 2배, 3배, 4배, …가 됨에 따라 y도 2배, 3배, 4배, …가 되는 관계가 있을 때 y는 x에 ☐한다고 한다.

(2) 정비례 관계 $y=ax$의 그래프 (단, $a\neq0$)

① ☐을 지나는 직선이다.

② $a>0$일 때 제☐사분면, 제☐사분면을 지난다.

③ $a<0$일 때 제☐사분면, 제☐사분면을 지난다.

2 반비례

124쪽

(1) 두 변수 x, y에서 x가 2배, 3배, 4배, …가 됨에 따라 y는 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{3}$배, $\frac{1}{4}$배, …가 되는 관계가 있을 때 y는 x에 ☐한다고 한다.

(2) 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프 (단, $a\neq0$)

① 한 쌍의 매끄러운 곡선이다.

② $a>0$일 때 제☐사분면, 제☐사분면을 지난다.

③ $a<0$일 때 제☐사분면, 제☐사분면을 지난다.

표준 문제

01 다음 중에서 y가 x에 정비례하는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $y=-x$　② $xy=7$　③ $y=x+2$

④ $y=\frac{1}{3}x$　⑤ $y=\frac{3}{x}$

02 두 변수 x, y에 대하여 y를 x에 대한 식으로 나타내고, 정비례 관계인지 반비례 관계인지 말하시오.

(1) x시간은 y분이다.

(2) 길이가 100 cm인 리본을 x개의 조각으로 똑같이 나눌 때, 한 조각의 길이는 y cm이다.

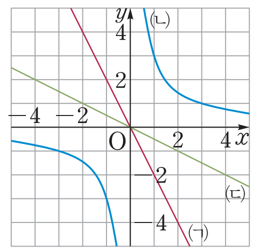
03 y가 x에 정비례하고 $x=3$일 때 $y=-5$이다. $x=-6$일 때 y의 값을 구하시오.

서술형 **04** 어느 과자 50 g의 열량이 200 kcal일 때, 다음에 답하시오.

(1) 이 과자 x g의 열량을 y kcal라고 할 때, y를 x에 대한 식으로 나타내시오.

(2) 이 과자를 48 g 먹었을 때 얻는 열량을 구하시오.

05 다음 설명에 알맞은 그래프를 오른쪽 그림에서 찾으시오.



(1) $y=-\frac{1}{2}x$의 그래프이다.

(2) 그래프 위의 점의 x좌표와 y좌표의 곱은 항상 3이다.

(3) 점 $(10,\ -20)$을 지난다.

06 x, y 사이의 관계를 나타내는 그래프가 제4사분면을 지나는 것을 보기에서 모두 고르시오.

보기

(ㄱ) $y=-4x$ (ㄴ) $y=\frac{7}{5}x$ (ㄷ) $y=\frac{1}{x}$

(ㄹ) $y=-\frac{6}{x}$ (ㅁ) $y=\frac{4}{3}x$

추론 **07** $y=\frac{a}{x}$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 보기에서 모두 고르시오. (단, $a\neq0$)

보기

(ㄱ) 원점을 지나지 않는다.

(ㄴ) $a>0$이면 제1사분면과 제3사분면을 지난다.

(ㄷ) a의 절댓값이 클수록 좌표축에 가까워진다.

서술형 **08** 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 4)$, $(-4,\ b)$를 지날 때, 다음을 구하시오. (단, $a\neq0$)

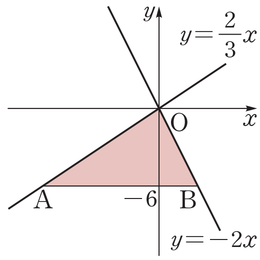
(1) a의 값

(2) b의 값

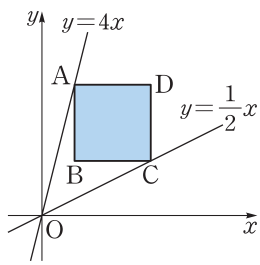
도전 문제

09 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B가 각각 정비례 관계 $y=\frac{2}{3}x$, $y=-2x$의 그래프 위의 점이고 두 점의 y좌표가 모두 -6일 때, 삼각형 OAB의 넓이를 구하시오.

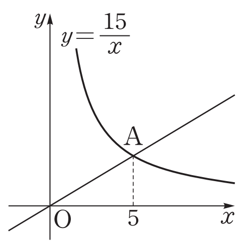
(단, O는 원점이다.)



문제 해결 **10** 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, C는 각각 정비례 관계 $y=4x$, $y=\frac{1}{2}x$의 그래프 위의 점이고 사각형 ABCD는 한 변의 길이가 7인 정사각형이다. 이때 점 D의 좌표를 구하시오. (단, 두 점 A, B의 x좌표는 같다.)



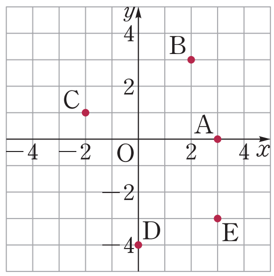
서술형 **11** 반비례 관계 $y=\frac{15}{x}$의 그래프 위의 점 A의 x좌표가 5일 때, 원점과 점 A를 지나는 직선을 그래프로 하는 정비례 관계의 식을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



대단원 마무리

정답 및 풀이 290쪽

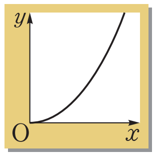
01 오른쪽 좌표평면 위의 5개의 점 A, B, C, D, E 중에서 x좌표와 y좌표의 합이 가장 작은 점을 말하시오.

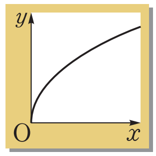


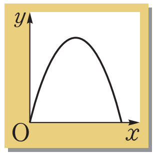
02 점 $\left(2a,\ \dfrac{a-1}{3}\right)$은 x축 위의 점이고 점 $(b-4,\ b+6)$은 y축 위의 점일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

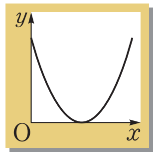
03 점 $(a+b,\ ab)$가 제2사분면 위의 점이고 $|b|<|a|$일 때, 점 $(-b,\ a-b)$는 어느 사분면 위에 있는지 말하시오.

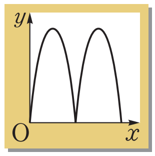
04 수영 선수가 수영장의 레인을 1번 왕복하였다. 출발한 후 경과 시간 x에 따른 출발점으로부터 떨어진 거리를 y라고 할 때, 다음 중에서 x와 y 사이의 관계를 나타낸 그래프로 알맞은 것은?

①


②


③


④


⑤


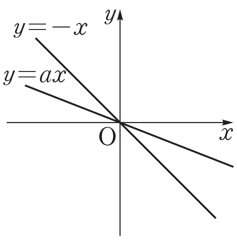
05 x의 값이 2배, 3배, 4배, …가 될 때 y의 값도 2배, 3배, 4배, …가 되고, $x=-2$일 때 $y=6$이다. $y=3$일 때 x의 값을 구하시오.

06 정비례 관계 $y=\dfrac{3}{4}x$의 그래프가 점 $(a,\ b)$를 지날 때, $3a-4b$의 값을 구하시오.

07 $y=\frac{x}{a}$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 보기에서 모두 고르시오. (단, $a\neq0$)

보기
(ㄱ) 원점을 지나는 직선이다.
(ㄴ) 점 $(2,\ 2a)$를 지난다.
(ㄷ) x와 y는 반비례 관계이다.
(ㄹ) $a<0$이면 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

08 정비례 관계 $y=-x$, $y=ax$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중에서 상수 a의 값이 될 수 있는 것은?



① -3　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{4}{5}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 2

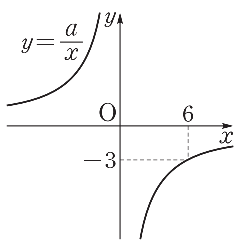
09 톱니가 20개이고 1분에 30바퀴 회전하는 톱니바퀴 A에 톱니가 x개인 톱니바퀴 B를 맞물려 회전시키면 1분에 y바퀴 회전한다고 한다. 이때 y를 x에 대한 식으로 나타내시오.

10 y가 x에 반비례할 때, ab의 값을 구하시오.

x	1	2	4	5
y	a		b	2

11 반비례 관계 $y=\frac{25}{x}$의 그래프 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하시오.

12 반비례 관계 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중에서 이 그래프 위에 있는 점의 좌표는? (단, a는 상수이다.)



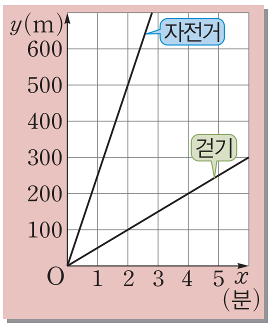
① $(4,\ -3)$
② $(2,\ -7)$
③ $(-6,\ 5)$
④ $(-8,\ 1)$
⑤ $(-9,\ 2)$

서술형

13 좌표평면 위의 세 점 $A(-2, -1)$, $B(1, -1)$, $C(3, c)$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 6이 되도록 하는 c의 값을 모두 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

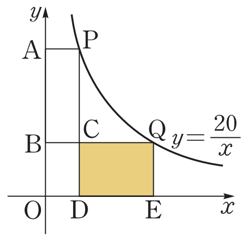
풀이

14 오른쪽 그림은 집에서 학교까지 일정한 속력으로 걸어갈 때와 자전거를 타고 갈 때, 등교 시간 x분에 따른 이동 거리 y m를 그래프로 나타낸 것이다. 집에서 학교까지의 거리가 750 m일 때, 자전거를 타고 가면 걸어갈 때보다 몇 분 먼저 학교에 도착하는지 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



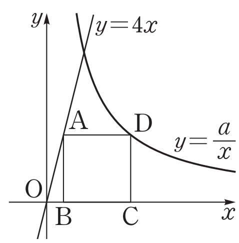
풀이

15 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q가 반비례 관계 $y=\dfrac{20}{x}$의 그래프 위에 있다. 직사각형 ABCP의 넓이가 12일 때, 직사각형 CDEQ의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

16 정사각형 ABCD의 꼭짓점 A는 정비례 관계 $y=4x$의 그래프 위에 있고, 꼭짓점 D는 반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위에 있다. 점 B의 x좌표가 1일 때, 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
① 순서쌍과 좌표를 이해한다.			
② 주어진 그래프를 해석할 수 있고, 주어진 상황을 그래프로 나타낼 수 있다.			
③ 정비례, 반비례 관계를 이해하고 이를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있다.			

보충 계획

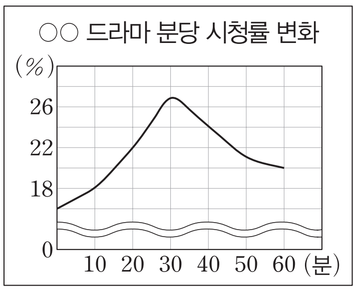
부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

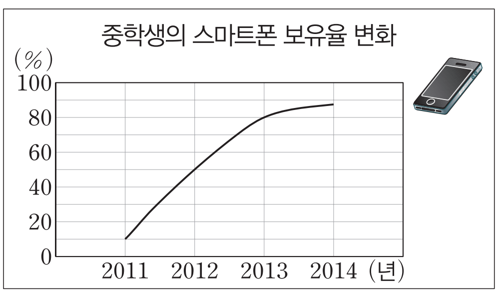
창의·융합 프로젝트

그래프로 세상 읽기

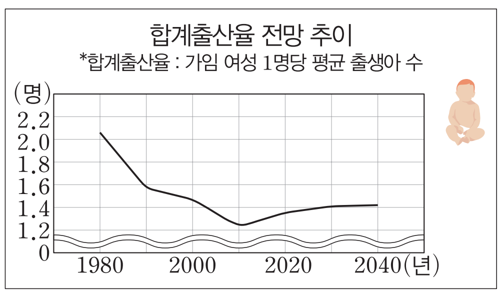
우리가 자주 접하는 기사에는 여러 가지 그래프가 제시되는데 그래프를 이용하면 기사의 내용을 더욱 쉽게 이해할 수 있다.

과제 1 다음 그래프 중에서 한 개를 골라 기사를 작성해 보자.





(출처: 정보통신정책연구원, 2015)



(출처: 통계청, 2014)

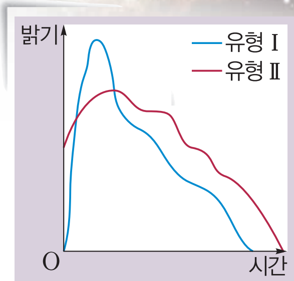
세상 속 수학

Math X Astronomy

그래프를 통해 본 별의 일생

사람들은 별이 영원하다고 생각하지만 별도 태어나서 자라고 결국에는 사라지는 일생을 거친다. 초신성(超新星)은 질량이 태양보다 수십 배 큰 별의 일생의 마지막 단계로, 별이 폭발하면서 생기는 엄청난 에너지 때문에 밝기가 평소의 수억 배에 이르렀다가 서서히 어두워지면서 사라지는 현상을 말한다. 실제로는 별이 죽어가는 모습이지만 한동안 새로운 별이 나타난 것처럼 보이기 때문에 초신성이라고 불리며, 과거에는 잠시 머물렀다 사라진다는 의미로 객성(客星), 즉 손님별이라고도 불렸다.

초신성은 크게 유형 Ⅰ과 유형 Ⅱ로 나뉜다. 유형 Ⅰ의 초신성은 급격하게 밝아졌다가 서서히 어두워지고, 유형 Ⅱ의 초신성은 서서히 밝아졌다가 서서히 어두워진다.



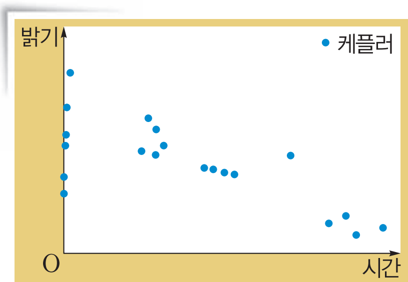
우리 은하에서 가장 최근에 관측된 초신성은 독일 천문학자 케플러(Kepler, J., 1571~1630)가 1604년에 관측한 '케플러 초신성'이다. 그러나 케플러의 관측 자료만으로는 초신성의 유형을 결정하기가 어려운데, 놀랍게도 케플러 초신성의 유형을 결정할 수 있는 상세한 자료가 『조선왕조실록』에 실려 있다.

케플러 초신성의 관측 자료가 실려 있는 『조선왕조실록』

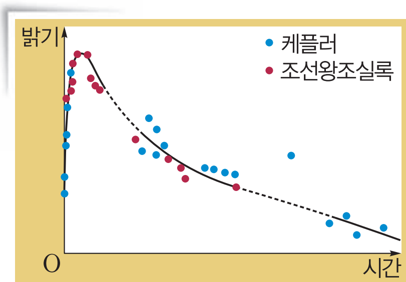
[그림 1]은 케플러의 관측 자료만을 활용하여 케플러 초신성의 시간에 따른 밝기를 나타낸 그래프로, 가장 밝은 시기의 모습을 구체적으로 알 수 없어서 초신성의 유형을 결정하기가 어렵다.

[그림 2]는 『조선왕조실록』에 실린 관측 자료를 함께 나타낸 그래프로 가장 밝은 시기의 모습을 알 수 있어 케플러 초신성이 유형 Ⅰ에 해당한다는 것을 확인할 수 있다.

(출처: 『주간조선』, 2006. 11. 22.)



[그림 1]



[그림 2]

진로 탐색

천문학자 | 천체를 관측하고 여러 천문 현상을 해석하며 나아가 천체들이 생성하고 소멸하는 원리를 밝히는 연구를 한다.

IV 기본 도형

배운 내용 — 이 단원의 내용 — 배울 내용

초 3~4
- 도형의 기초

초 5~6
- 합동

1 기본 도형
- 점, 선, 면, 각
- 위치 관계
- 평행선의 성질

2 작도와 합동
- 삼각형의 작도
- 삼각형의 합동 조건

중 1
- 평면도형의 성질
- 입체도형의 성질

중 2
- 삼각형과 사각형의 성질
- 도형의 닮음
- 피타고라스 정리

중 3
- 삼각비

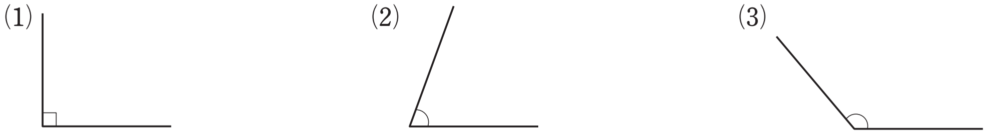

쇠라의 점묘화, 몬드리안의 추상화에서 점, 선, 면을 찾아볼 수 있다. 뿐만 아니라 우리 주변의 사물은 점, 선, 면으로 이루어져 있다.
이 단원에서는 점, 선, 면을 바탕으로 기본 도형을 알아본다.
몬드리안(Mondrian, P., 1872~1944)의 「빨강, 파랑, 노랑의 구성」
쇠라(Seurat, G. P., 1859~1891)의 「그랑드 자트섬의 일요일 오후」

1 기본 도형

준비 학습

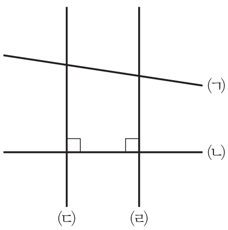
예각, 직각, 둔각

❶ 다음 각을 예각, 직각, 둔각으로 구분하시오.



수직과 평행

❷ 오른쪽 그림에서 서로 수직인 직선과 평행한 직선을 각각 찾으시오.



1 점, 선, 면, 각

점, 선, 면, 각을 이해한다.

점, 선, 면

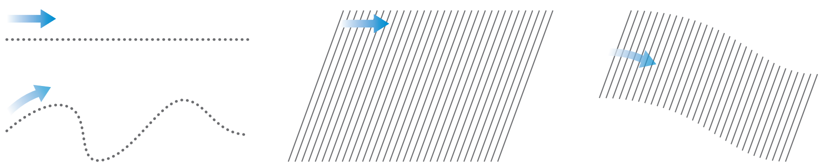
생각톡

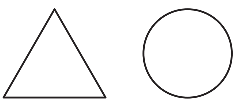
디지털 이미지를 확대하면 네모 모양의 작은 점들을 볼 수 있는데, 이와 같이 이미지를 구성하는 최소 단위인 점을 픽셀(pixel)이라고 한다. 이미지를 구성하는 픽셀의 개수에 따라 이미지의 해상도가 결정된다.

탐구 다음과 같이 점으로 이루어진 바탕에서 점을 이어서 자신의 이름 중 한 글자를 써보자.

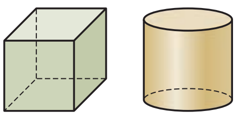
점이 연속적으로 움직이면 선이 되고, 선이 연속적으로 움직이면 면이 된다.

이와 같이 선은 무수히 많은 점으로 이루어져 있고, 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있음을 알 수 있다.





평면도형

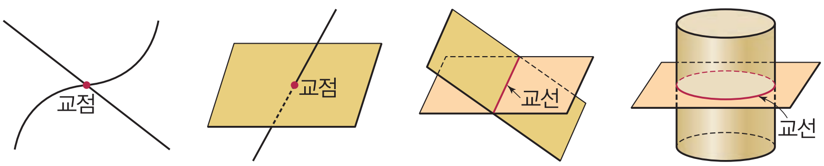


입체도형

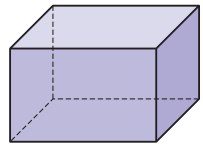
삼각형, 원과 같은 평면도형과 직육면체, 원기둥, 구와 같은 입체도형은 점, 선, 면으로 이루어져 있다. 따라서 점, 선, 면을 도형의 기본 요소라고 할 수 있다.

교점, 교선에서 교(交)는 '만나다'라는 뜻이다.

점과 선은 두 도형이 만날 때에도 생긴다. 다음 그림과 같이 선과 선 또는 선과 면이 만나서 생기는 점을 **교점**이라 하고, 면과 면이 만나서 생기는 선을 **교선**이라고 한다.



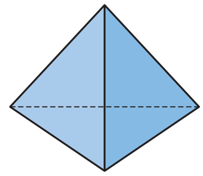
보기 오른쪽 직육면체에서



❶ 선과 선이 만나서 생기는 교점은 모두 8개이다.

❷ 면과 면이 만나서 생기는 교선은 모두 12개이다.

문제 1 **오른쪽 삼각뿔에서 다음을 구하시오.**



(1) 교점의 개수

(2) 교선의 개수

찾아보기 다음은 점이 움직여 선이 되고, 선이 움직여 면이 되는 예이다. 주변에서 이와 같은 예를 찾아보자.

별똥별

자동차 와이퍼

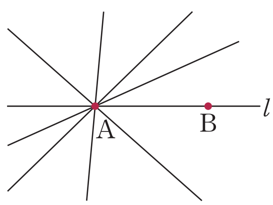
직선, 반직선, 선분

생각톡 오른쪽은 부산 광안대교의 레이저 쇼 장면이다. 한 점에서 발사된 레이저는 한없이 직진한다.

탐구 오른쪽에서 선분과 반직선을 찾아보자.

보통 점은 영어 알파벳 대문자 A, B, C, …로 나타내고, 직선은 알파벳 소문자 l, m, n, …으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 한 점 A를 지나는 직선은 무수히 많지만 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선은 오직 하나뿐이다.



서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선 AB를 기호로

$\overleftrightarrow{AB}$와 $\overleftrightarrow{BA}$는 같은 직선이다.

$$\overleftrightarrow{AB}$$

와 같이 나타낸다.

또 직선 AB 위의 점 A에서 출발하여 점 B의 방향으로 뻗은 부분인 반직선 AB를 기호로

$\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{BA}$는 서로 다른 반직선이다.

$$\overrightarrow{AB}$$

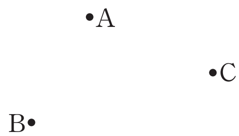
와 같이 나타내고, 직선 AB 위의 점 A에서 점 B까지의 부분인 선분 AB를 기호로

$\overline{AB}$와 $\overline{BA}$는 같은 선분이다.

$$\overline{AB}$$

와 같이 나타낸다.

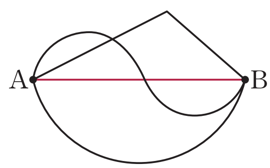
문제 2 **오른쪽 그림의 세 점 A, B, C 중 두 점을 지나는 모든 반직선을 기호로 나타내시오.**



문제 3 **오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다. 다음에서 서로 같은 것끼리 짝 지으시오.**

$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BA}$ $\overline{AC}$ $\overrightarrow{AC}$ $\overline{CA}$ $\overleftrightarrow{AC}$ $\overleftrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{CA}$

두 점 A, B를 잇는 무수히 많은 선 중에서 길이가 가장 짧은 것은 선분 AB이다. 이때 선분 AB의 길이를 **두 점 A, B 사이의 거리**라고 한다.



선분 AB의 길이가 3 cm일 때,

$$\overline{AB}=3\text{ cm}$$

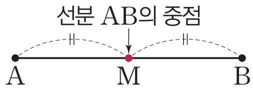
$\overline{AB}$는 도형으로서 선분 AB를 나타내기도 하고 그 선분의 길이를 나타내기도 한다.

와 같이 나타낸다. 또 선분 AB와 선분 CD의 길이가 서로 같을 때,

$$\overline{AB}=\overline{CD}$$

와 같이 나타낸다.

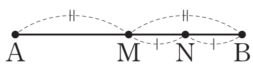
한편 오른쪽 그림과 같이 선분 AB 위의 한 점 M에 대하여 $\overline{AM}=\overline{BM}$일 때, 점 M을 선분 AB의 **중점**이라고 한다. 이때 점 M은 선분 AB를 이등분하므로



$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\overline{BM}$

$\overline{AM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AB}$이다.

문제 4 **오른쪽 그림에서 점 M은 선분 AB의 중점이고 점 N은 선분 MB의 중점일 때, 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.**



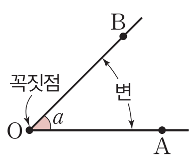
(1) $\overline{AB}=\square\,\overline{AM}$ (2) $\overline{MN}=\square\,\overline{AB}$

표현하기

다음 조건을 모두 만족시키는 점 A, B, C, D, E를 직선 l 위에 나타내고 짝과 비교해 보자.

(가) 점 C는 선분 AB의 중점이다.
(나) $\overline{AC}=2\overline{AE}$, $\overline{AE}=2\overline{CD}$

각



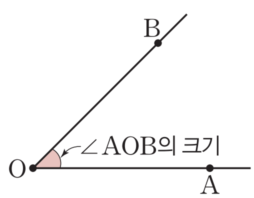
$\angle AOB$와 $\angle BOA$는 같은 각이다. 또 $\angle AOB$는 $\angle O$ 또는 $\angle a$로 나타내기도 한다.

두 반직선 OA와 OB로 이루어진 도형을 각 AOB라 하고, 이것을 기호로

$$\angle AOB$$

와 같이 나타낸다.

한편 $\angle AOB$에서 꼭짓점 O를 중심으로 변 OA가 변 OB까지 회전한 양을 $\angle AOB$의 크기라고 한다.



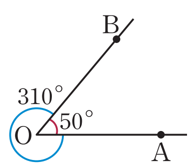
$\angle AOB$의 크기가 $50°$일 때,

$$\angle AOB=50°$$

와 같이 나타낸다.

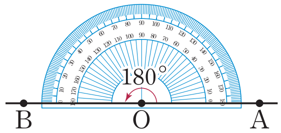
$\angle AOB$는 도형으로서 각 AOB를 나타내기도 하고 그 각의 크기를 나타내기도 한다.

참고 오른쪽 그림에서 $\angle AOB$의 크기는 $50°$ 또는 $310°$라고 생각할 수 있지만 보통 크기가 작은 쪽의 각을 말한다.

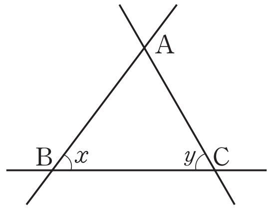


크기가 0°보다 크고 직각보다 작은 각을 예각, 직각보다 크고 평각보다 작은 각을 둔각이라고 한다.

$\angle$AOB의 두 변 OA와 OB가 점 O를 중심으로 반대쪽에 있고 한 직선을 이룰 때, 즉 $\angle$AOB$=180°$일 때, 이 각을 **평각**이라고 한다.

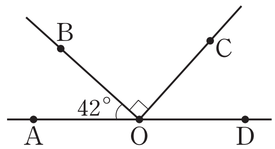


문제 5 **오른쪽 그림에서 $\angle x$, $\angle y$를 세 점 A, B, C를 이용하여 나타내시오.**



문제 6 **오른쪽 그림에서 $\angle$AOD가 평각일 때, 다음 각의 크기를 구하시오.**

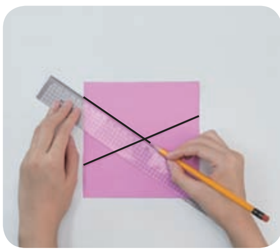
(1) $\angle$BOD (2) $\angle$COD

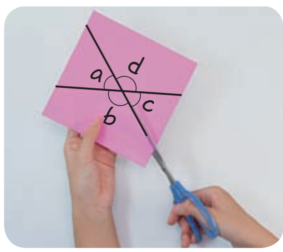


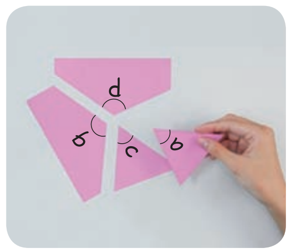
맞꼭지각

생각톡

다음은 두 직선이 만날 때 생기는 각의 성질에 대하여 알아보는 활동이다.







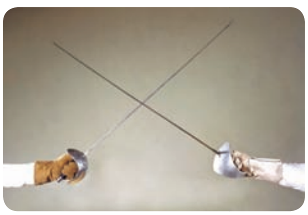
① 색종이에 두 직선을 서로 만나도록 그린다.

② 두 직선이 만날 때 생기는 각을 모두 표시하고, 선을 따라 자른다.

③ 잘라 낸 각을 포개어 각의 크기를 비교한다.

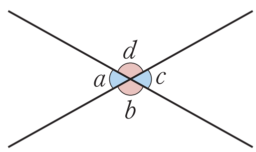
탐구 ① 크기가 같은 각은 모두 몇 쌍인지 말해 보자.

탐구 ② 크기가 같은 각은 자르기 전에 어떤 위치에 있었는지 말해 보자.



오른쪽 그림과 같이 두 직선이 한 점에서 만날 때 생기는 네 개의 각 $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$를 두 직선의 **교각**이라고 한다.

이때 $\angle a$와 $\angle c$, $\angle b$와 $\angle d$처럼 서로 마주 보는 각을 **맞꼭지각**이라고 한다.

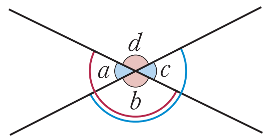


오른쪽 그림에서

$$\angle a+\angle b=180^\circ,\quad \angle b+\angle c=180^\circ$$

이므로 맞꼭지각 $\angle a$, $\angle c$에 대하여 $\angle a=\angle c$이다.

같은 방법으로 $\angle b=\angle d$임을 알 수 있다.

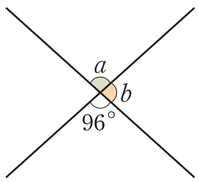


이상을 정리하면 다음과 같다.

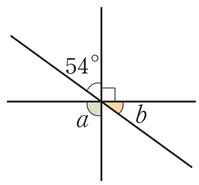
> **맞꼭지각의 성질**
> 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.

문제 7 **다음 그림에서 $\angle a$, $\angle b$의 크기를 구하시오.**

(1)



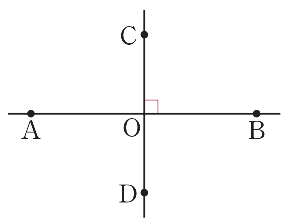
(2)



오른쪽 그림과 같이 두 직선 AB와 CD의 교각이 직각일 때, 두 직선은 **직교**한다고 하고, 이것을 기호로

$$\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{CD}$$

와 같이 나타낸다. 이때 두 직선은 서로 수직이고 한 직선은 다른 직선의 수선이다.



$\overline{AB}$와 $\overline{CD}$가 만나고 $\overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{CD}$일 때, $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는 직교한다고 하고, 이것을 기호로

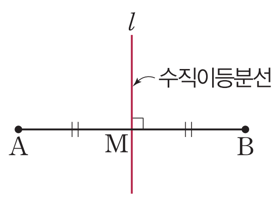
$\overline{AB}\perp\overline{CD}$

와 같이 나타낸다.

직선 l이 선분 AB의 중점 M을 지나면서 선분 AB에 수직일 때, 즉

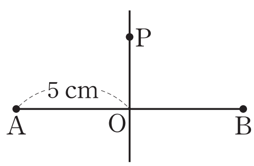
$$l\perp\overline{AB},\quad \overline{AM}=\overline{BM}$$

일 때, 직선 l을 선분 AB의 **수직이등분선**이라고 한다.



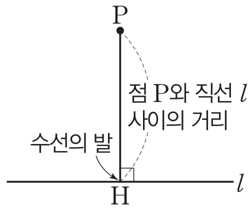
문제 8 **오른쪽 그림에서 직선 PO는 선분 AB의 수직이등분선이다. 다음을 구하시오.**

(1) $\overline{BO}$의 길이 (2) $\angle POA$의 크기



직선 l 위에 있지 않은 한 점 P에서 직선 l에 수선을 그을 때, 이 수선과 직선 l의 교점 H를 점 P에서 직선 l에 내린 **수선의 발**이라고 한다.

이때 점 P와 직선 l 위의 점을 이은 선분 중에서 길이가 가장 짧은 것은 선분 PH이고, 이 선분의 길이를 점 P와 직선 l 사이의 거리라고 한다.

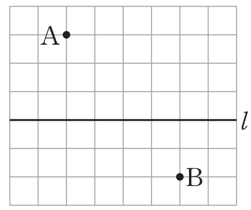


문제 9 **오른쪽은 한 눈금의 길이가 1인 모눈종이에 두 점 A, B와 직선 l을 나타낸 것이다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 할 때, 다음에 답하시오.**

(1) 두 점 P, Q를 모눈종이에 나타내시오.

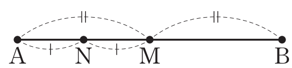
(2) 두 점 A, B와 직선 l 사이의 거리를 차례대로 구하시오.

(3) 선분 PQ의 수직이등분선을 그리시오.



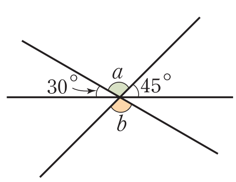
확인하기

1 오른쪽 그림에서 점 M은 선분 AB의 중점이고, 점 N은 선분 AM의 중점이다. $\overline{AB}=16$ cm일 때, $\overline{NB}$의 길이를 구하시오.

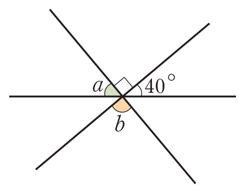


2 다음 그림에서 $\angle a$, $\angle b$의 크기를 구하시오.

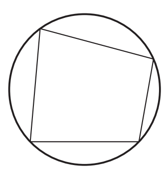
(1)



(2)



사고력+ 오른쪽 그림과 같이 네 꼭짓점이 원 위에 있는 사각형의 둘레의 길이가 원의 둘레의 길이보다 짧은 이유를 두 점 사이의 거리를 이용하여 설명하시오.



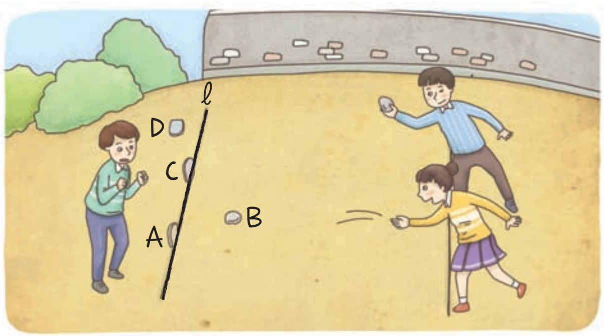
2 위치 관계

점, 직선, 평면의 위치 관계를 설명할 수 있다.

점과 직선의 위치 관계

생각 톡

비사치기는 땅바닥에 선을 그은 뒤 돌을 그 선 위에 세우고 다른 돌을 던져 상대방의 돌을 쓰러뜨리는 우리나라의 민속놀이이다.

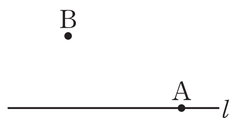


탐구 위의 그림의 돌 A, B, C, D 중에서 직선 l 위에 있는 것을 말해 보자.

점이 직선 위에 있다는 것은 직선이 그 점을 지난다는 뜻이다.

점이 직선 위에 있지 않을 때 '점이 직선 밖에 있다.' 라고도 한다.

오른쪽 그림에서 점 A는 직선 l 위에 있고, 점 B는 직선 l 위에 있지 않다.



점과 직선의 위치 관계는 다음의 두 가지 경우가 있다.

점과 직선의 위치 관계

❶ 점이 직선 위에 있다.

A
l

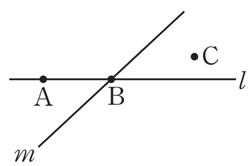
❷ 점이 직선 위에 있지 않다.

•A
l

문제 1 **오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m과 세 점 A, B, C가 한 평면 위에 있을 때, 다음에 답하시오.**

(1) 직선 l 위에 있는 점을 모두 말하시오.

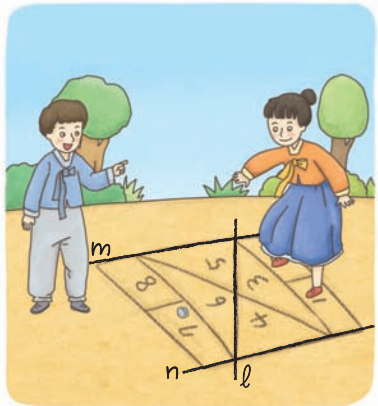
(2) 직선 m과 세 점 A, B, C의 위치 관계를 각각 말하시오.



평면에서 두 직선의 위치 관계

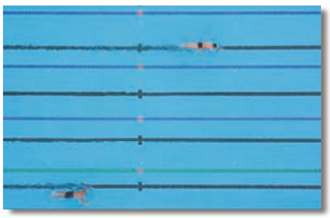
생각 톡

사방치기는 직사각형 모양 안에 칸을 나누고 돌을 한 개 던진 후 그 돌이 놓인 칸을 제외한 나머지 칸을 한 발 또는 두 발로 뛰어서 순서대로 이동하였다가 돌아오는 우리나라의 민속놀이이다.
오른쪽 그림은 사방치기 놀이판에 세 직선 l, m, n을 나타낸 것이다.



탐구 ① 평행한 두 직선을 찾아보자.

탐구 ② 만나는 두 직선을 찾아보자.



한 평면 위에서 두 직선은 만날 때와 만나지 않을 때가 있다.

한 평면 위에 있는 두 직선 l, m이 만나지 않을 때, 두 직선 l, m은 평행하다고 하고, 이것을 기호로

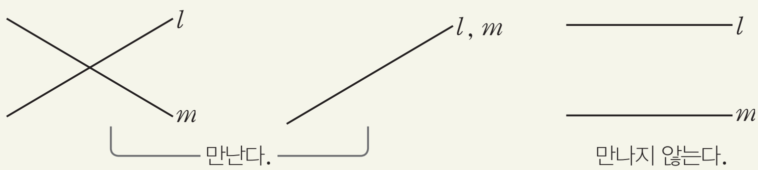
$$l /\!/ m$$

과 같이 나타낸다.

한 평면 위에서 두 직선의 위치 관계는 다음의 세 가지 경우가 있다.

평면에서 두 직선의 위치 관계

❶ 한 점에서 만난다. ❷ 일치한다. ❸ 평행하다.

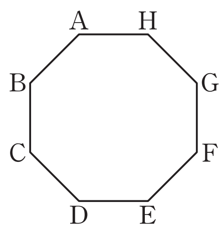


문제 2 오른쪽 정팔각형에서 각 변을 연장한 직선에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 직선 AH와 만나는 직선

(2) 직선 AH와 만나지 않는 직선

(3) 교점이 C인 두 직선

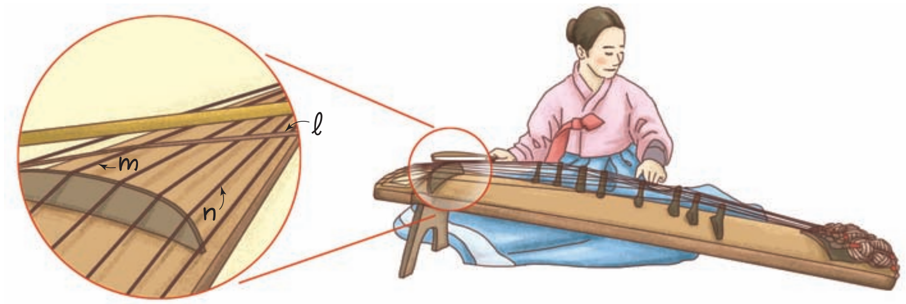


공간에서 두 직선의 위치 관계

생각톡

아쟁은 받침대에 악기의 머리 부분을 비스듬하게 걸친 채로 바닥에 앉아 활대로 줄을 그어 연주하는 국악기이다.

다음은 아쟁의 줄과 활대에 세 직선 l, m, n을 나타낸 것이다.



탐구 ① 만나는 두 직선을 찾아보자.

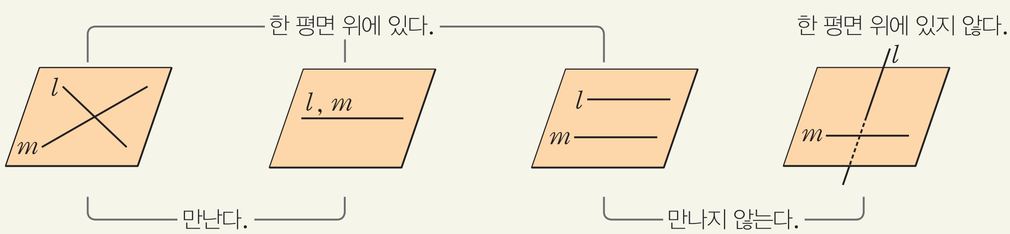
탐구 ② 만나지도 않고 평행하지도 않은 두 직선을 찾아보자.

한 평면 위에 있는 두 직선은 만나거나 평행하다. 그러나 공간에서는 두 직선이 만나지도 않고 평행하지도 않을 때가 있다. 이때 두 직선은 **꼬인 위치**에 있다고 한다. 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있지 않다.

공간에서 두 직선의 위치 관계는 다음의 네 가지 경우가 있다.

공간에서 두 직선의 위치 관계

❶ 한 점에서 만난다. ❷ 일치한다. ❸ 평행하다. ❹ 꼬인 위치에 있다.

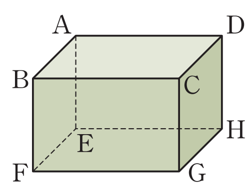


보기 오른쪽 직육면체에서

❶ 모서리 AB와 모서리 BC는 한 점 B에서 만난다.

❷ 모서리 AB와 모서리 DC는 평행하다.

❸ 모서리 AB와 모서리 CG는 꼬인 위치에 있다.

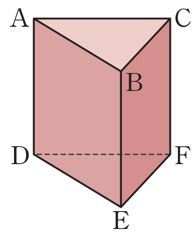


문제 3 오른쪽 삼각기둥에서 다음을 구하시오.

(1) 모서리 AB와 만나는 모서리

(2) 모서리 AB와 평행한 모서리

(3) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리



찾아보기

오른쪽에서 외줄과 장대는 꼬인 위치에 있다. 이와 같이 주변에서 꼬인 위치에 있는 두 직선의 예를 찾아보자.

공간에서 직선과 평면의 위치 관계

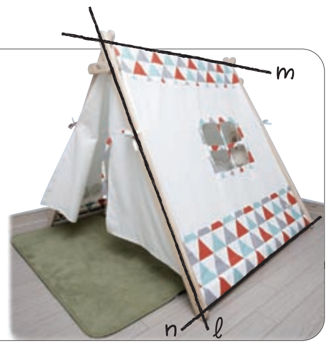
생각 톡

오른쪽은 놀이 텐트에 세 직선 l, m, n을 나타낸 것이다.

탐구 ① 바닥과 한 점에서 만나는 직선을 말해 보자.

탐구 ② 바닥에 놓여 있는 직선을 말해 보자.

탐구 ③ 바닥과 평행한 직선을 말해 보자.



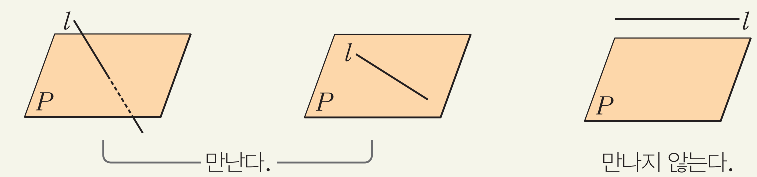
공간에서 직선과 평면은 만날 때와 만나지 않을 때가 있다.

공간에서 직선 l과 평면 P가 만나지 않을 때, 직선 l과 평면 P는 평행하다고 하고, 이것을 기호로 $l \,/\!/\, P$와 같이 나타낸다.

공간에서 직선과 평면의 위치 관계는 다음의 세 가지 경우가 있다.

공간에서 직선과 평면의 위치 관계

❶ 한 점에서 만난다. ❷ 포함된다. ❸ 평행하다.

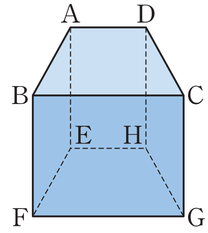


문제 4 **오른쪽 사각기둥에서 다음을 구하시오.**

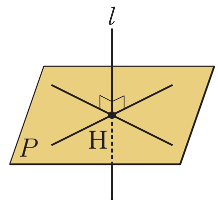
(1) 모서리 CG를 포함하는 면

(2) 모서리 CG와 평행한 면

(3) 모서리 CG와 한 점에서 만나는 면



오른쪽 그림에서 직선 l은 평면 P와 점 H에서 만나고, 점 H를 지나면서 평면 P에 포함된 모든 직선과 수직이다. 이때 직선 l과 평면 P는 수직이다 또는 직교한다고 하고, 이것을 기호로 $l \perp P$와 같이 나타낸다.



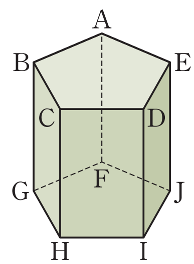
한편 직선 l은 평면 P의 수선이라 하고 점 H는 수선의 발이라고 한다.

문제 5 **오른쪽 오각기둥에서 다음을 구하시오.**

(1) 모서리 AF와 수직인 면

(2) 면 ABCDE와 수직인 모서리

(3) 점 B에서 면 FGHIJ에 내린 수선의 발



확인하기

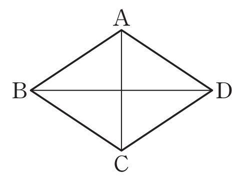
1 오른쪽 마름모 ABCD에서 각 변과 대각선을 연장한 직선에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 직선 AB 위에 있는 꼭짓점

(2) 직선 BD 위에 있지 않은 꼭짓점

(3) 직선 CD와 만나는 직선

(4) 직선 BC와 만나지 않는 직선

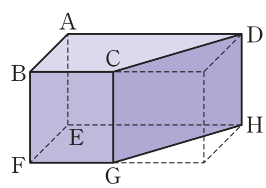


2 오른쪽 그림은 직육면체에서 삼각기둥을 잘라 만든 입체도형이다. 각 모서리를 연장한 직선에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 직선 AB와 한 점에서 만나는 직선

(2) 직선 CD와 꼬인 위치에 있는 직선

(3) 면 AEHD와 평행한 직선



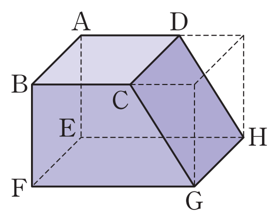
수학 역량 플러스

틀린 말을 찾아라

의사소통 추론

다음은 공간에서 직선과 직선, 직선과 평면의 위치 관계를 설명한 내용이다.

활동 1 오른쪽 그림은 직육면체에서 삼각기둥을 잘라 만든 입체도형이다. 위에서 틀린 내용을 찾고, 그 이유를 오른쪽 입체도형을 이용하여 설명해 보자.



활동 2 위에서 옳은 내용을 주변 사물에서 확인해 보자.

3 평행선의 성질

▶ 평행선에서 동위각과 엇각의 성질을 이해한다.

동위각과 엇각

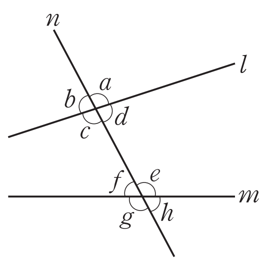
생각톡

도로명 주소 체계에서는 8차로 이상의 도로에는 '□□대로', 2~7차로에는 '△△로', 그 외의 도로에는 '○○길'과 같은 방법으로 이름을 붙인다.
오른쪽 그림은 중앙대로 주변을 나타낸 것이다.

탐구 ① 중앙대로를 기준으로 시청이 통일로에서 오른쪽 아래에 있다고 할 때, 문화로에서 오른쪽 아래에 있는 건물을 말해 보자.

탐구 ② 중앙대로를 기준으로 시청과 미술관이 서로 엇갈린 위치에 있다고 할 때, 면세점과 엇갈린 위치에 있는 건물을 말해 보자.

오른쪽 그림과 같이 한 평면 위에서 서로 다른 두 직선 l, m이 한 직선 n과 만나면 8개의 교각이 생긴다.



이때

$\angle a$와 $\angle e$, $\angle b$와 $\angle f$,

$\angle c$와 $\angle g$, $\angle d$와 $\angle h$

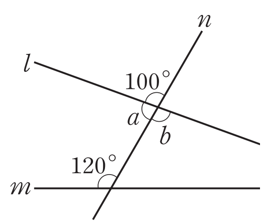
처럼 서로 같은 위치에 있는 두 각을 **동위각**이라고 한다. 또

$\angle c$와 $\angle e$, $\angle d$와 $\angle f$

처럼 서로 엇갈린 위치에 있는 두 각을 **엇각**이라고 한다.

동위각(同位角)은 '같은 위치에 있는 각'이라는 뜻이다.

문제 1 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m이 직선 n과 만날 때, 다음 각의 크기를 구하시오.



(1) $\angle a$의 동위각

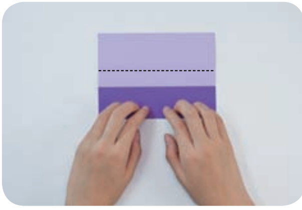
(2) $\angle b$의 동위각

(3) $\angle a$의 엇각

평행선에서 동위각과 엇각

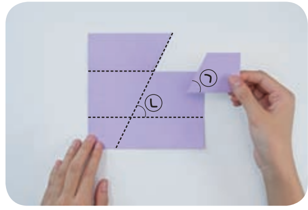
생각톡

다음은 색종이를 이용하여 평행한 두 직선이 한 직선과 만날 때 생기는 동위각의 성질을 알아보는 활동이다.



❶ 색종이를 접는 선이 평행하게 두 번 접어 펼친다.

❷ 접는 선이 앞에서 접은 두 선을 지나도록 비스듬히 접는다.

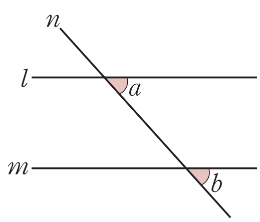


❸ ㉠을 오려낸다.

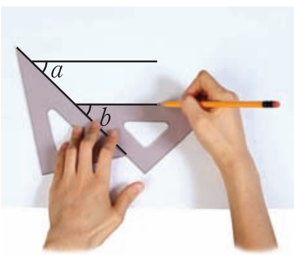
탐구 ① 오려낸 각 ㉠을 ㉡에 포개어 각의 크기를 비교해 보자.

탐구 ② 탐구 ①로부터 알 수 있는 사실을 말해 보자.

위의 생각톡에서 알 수 있듯이 평행한 두 직선이 한 직선과 만나서 생기는 동위각의 크기는 항상 같다. 즉 오른쪽 그림에서 평행한 두 직선 l, m이 한 직선 n과 만나서 생기는 동위각 $\angle a$, $\angle b$의 크기는 항상 같다.



또 한 직선 n에 대하여 동위각 $\angle a$, $\angle b$의 크기가 같도록 두 직선 l, m을 그으면 두 직선 l과 m은 평행하다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

평행선과 동위각

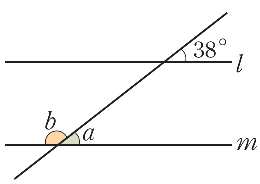
서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때

❶ 두 직선이 평행하면 동위각의 크기는 서로 같다.

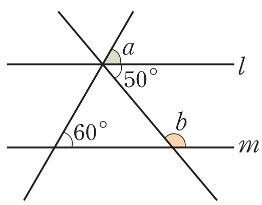
❷ 동위각의 크기가 서로 같으면 두 직선은 평행하다.

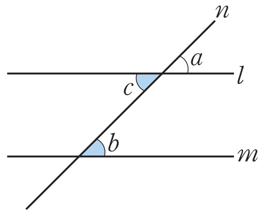
문제 2 다음 그림에서 두 직선 l, m이 평행할 때, $\angle a$, $\angle b$의 크기를 구하시오.

(1)



(2)





오른쪽 그림에서 $l /\!/ m$이면 동위각의 크기가 같으므로 $\angle a = \angle b$이다. 그런데 $\angle a$와 $\angle c$는 맞꼭지각이므로 $\angle a = \angle c$이다. 따라서 $\angle b = \angle c$이다.

또 오른쪽 그림에서 $\angle a = \angle c$이므로 엇각 $\angle b$, $\angle c$의 크기가 같으면, 즉 $\angle b = \angle c$이면 $\angle a = \angle b$이다.

그런데 $\angle a$와 $\angle b$는 동위각이므로 $l /\!/ m$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평행선과 엇각

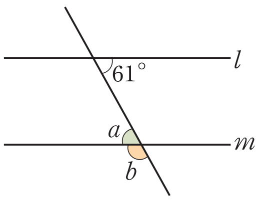
서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때

❶ 두 직선이 평행하면 엇각의 크기는 서로 같다.

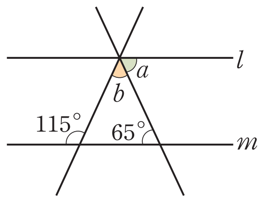
❷ 엇각의 크기가 서로 같으면 두 직선은 평행하다.

문제 3 **다음 그림에서 두 직선 l, m이 평행할 때, $\angle a$, $\angle b$의 크기를 구하시오.**

(1)



(2)

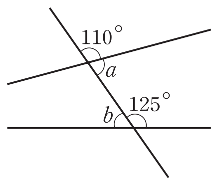


확인하기

1 오른쪽 그림에서 다음 각의 크기를 구하시오.

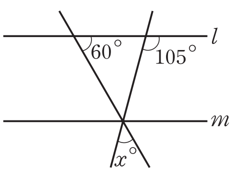
(1) $\angle a$의 동위각

(2) $\angle b$의 엇각

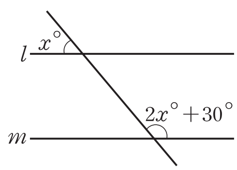


2 다음 그림에서 $l /\!/ m$일 때, x의 값을 구하시오.

(1)



(2)



수학 역량 플러스

잠망경 속 평행선의 성질

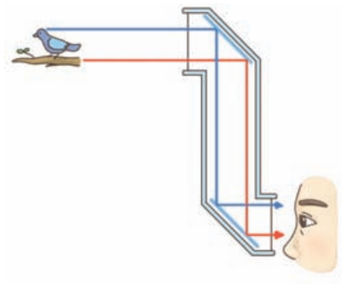
추론 창의·융합

잠망경은 물속의 잠수함에서 물 위를 관찰할 때와 같이 눈으로 직접 볼 수 없는 곳을 볼 수 있게 해 주는 장치이다.

잠망경의 기본 원리는 45°의 각도로 기울어진 두 개의 평행한 거울에 빛이 반사되는 성질을 이용하는 것으로, 오른쪽 그림과 같이 물체에서 반사되는 빛이

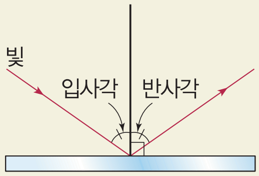
위쪽 거울 ➔ 아래쪽 거울 ➔ 눈

의 순서로 이동하여 물체를 볼 수 있게 된다.

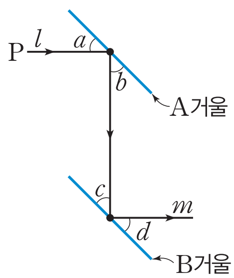


이때 이용되는 빛의 성질은 다음과 같다.

빛이 평면에 반사될 때, 들어오는 빛과 평면에 수직인 직선이 이루는 각을 입사각, 반사되어 나가는 빛과 평면에 수직인 직선이 이루는 각을 반사각이라고 한다.
이때 입사각과 반사각의 크기는 항상 같다.



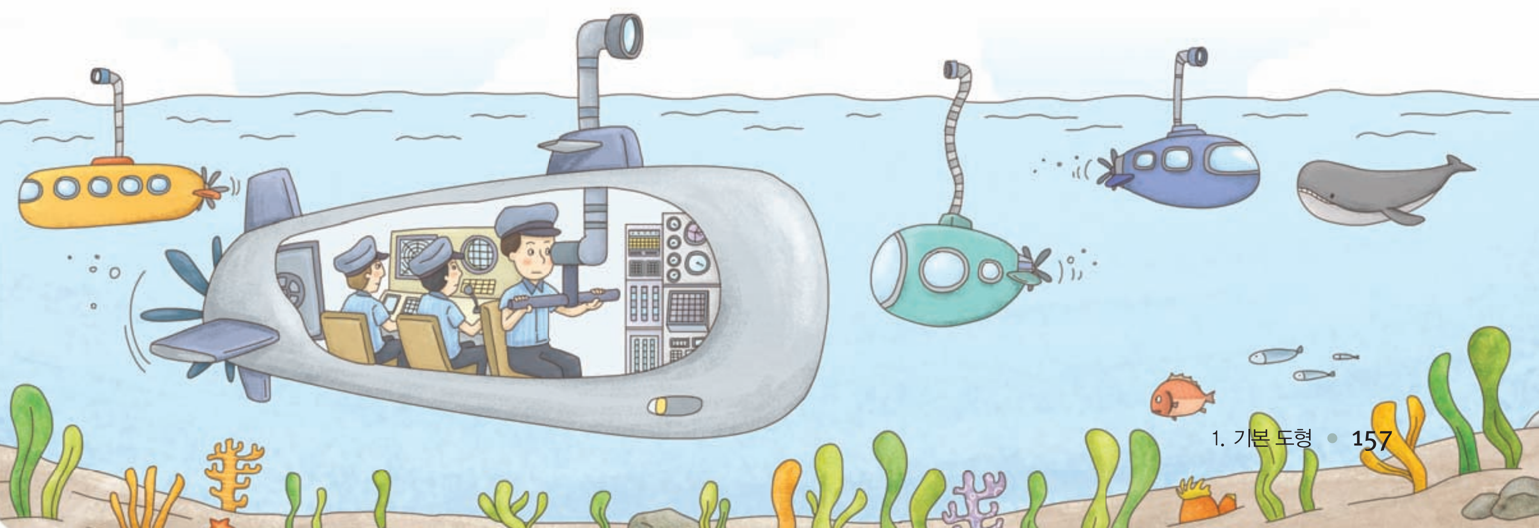
활동 1 오른쪽 그림은 빛이 P지점에서 출발하여 두 거울 A, B에 반사되는 경로를 나타낸 것이다. 두 거울 A, B가 서로 평행할 때, 다음에 답하시오.



(1) 빛의 성질을 이용하여 $\angle a=\angle b$, $\angle c=\angle d$임을 설명해 보자.

(2) 평행선의 성질을 이용하여 $\angle b=\angle c$임을 설명해 보자.

(3) 두 직선 l, m이 평행한 이유를 설명해 보자.



중단원 마무리

Ⅳ-1 기본 도형

정답 및 풀이 293쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 점, 선, 면, 각

141쪽

(1) 선과 선 또는 선과 면이 만나서 생기는 점을 $\boxed{\quad\quad}$이라 하고 면과 면이 만나서 생기는 선을 $\boxed{\quad\quad}$이라고 한다.

(2) 직선 AB, 반직선 AB, 선분 AB를 각각 기호로 $\boxed{\quad\quad}$, $\boxed{\quad\quad}$, $\boxed{\quad\quad}$와 같이 나타낸다.

(3) 선분 AB를 이등분하는 점을 선분 AB의 $\boxed{\quad\quad}$이라고 한다.

(4) 두 직선이 한 점에서 만날 때 생기는 각 중에 서로 마주 보는 각을 $\boxed{\quad\quad}$이라 하고 그 크기는 서로 같다.

(5) 직선 위에 있지 않은 점 P에서 직선에 수선을 그었을 때, 그 교점을 점 P에서 직선에 내린 $\boxed{\quad\quad}$이라고 한다.

❷ 위치 관계

148쪽

(1) 공간에서 두 직선이 만나지도 않고 평행하지도 않으면 $\boxed{\quad\quad}$에 있다고 한다.

(2) 공간에서 직선과 평면의 위치 관계는 직선이 평면에 포함되거나 한 점에서 만나거나 $\boxed{\quad\quad}$하다.

❸ 평행선의 성질

154쪽

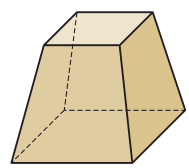
서로 다른 두 직선이 한 직선과 만날 때,

(1) 두 직선이 평행하면 동위각과 엇각의 크기는 각각 서로 $\boxed{\quad\quad}$.

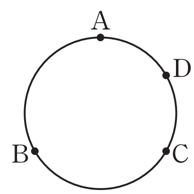
(2) 동위각 또는 엇각의 크기가 각각 같은 두 직선은 $\boxed{\quad\quad}$하다.

표준 문제

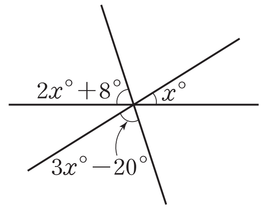
01 오른쪽 입체도형에서 교점을 a개, 교선을 b개라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.



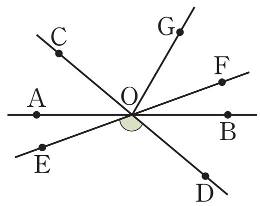
02 오른쪽 그림과 같은 원 위의 네 점 A, B, C, D 중에서 두 점을 지나는 서로 다른 직선을 a개, 반직선을 b개라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.



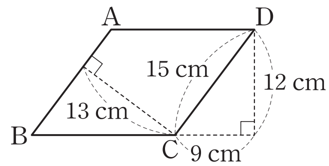
03 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 한 점에서 만날 때, x의 값을 구하시오.



04 오른쪽 그림과 같이 세 직선 AB, CD, EF가 한 점 O에서 만날 때, $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle COG$, $\angle BOF=\frac{1}{2}\angle FOG$가 성립한다. 이때 $\angle EOD$의 크기를 구하시오.

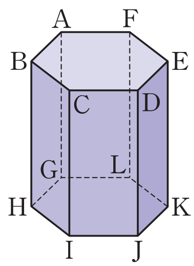


05 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 점 A와 직선 BC 사이의 거리를 x cm, 점 A와 직선 CD 사이의 거리를 y cm라고 할 때, $x-y$의 값을 구하시오.



서술형 **06** 오른쪽 그림과 같이 밑면이 정육각형인 각기둥에서 각 모서리를 연장한 직선에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 두 직선 BC, BH와 동시에 꼬인 위치에 있는 직선
(2) 면 BHIC와 평행한 직선

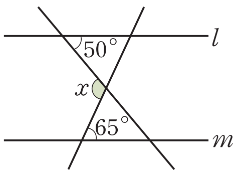


서술형 **07** 공간에서 서로 다른 세 직선 l, m, n과 평면 P에 대한 다음 설명 중에서 틀린 것을 모두 찾고 그 이유를 설명하시오.

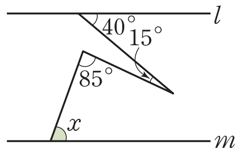
(1) $l\perp m$, $l\perp n$이면 $m/\!/n$이다.
(2) $P/\!/l$, $P/\!/m$이면 $l/\!/m$이다.
(3) $P\perp l$, $P\perp m$이면 $l/\!/m$이다.

08 다음 그림에서 $l /\!/ m$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.

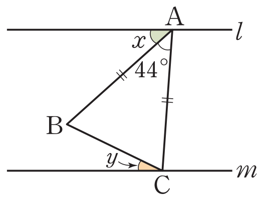
(1)



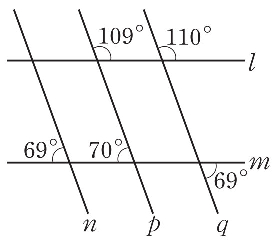
(2)



09 오른쪽 그림에서 $l /\!/ m$이고, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이다. $\angle BAC=44°$일 때, $\angle x+\angle y$의 크기를 구하시오.



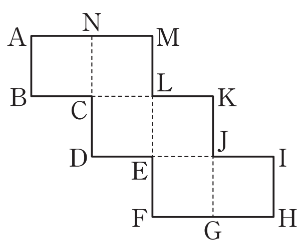
추론 **10** 오른쪽 그림에서 평행한 직선을 찾아 기호로 나타내고, 그 이유를 설명하시오.



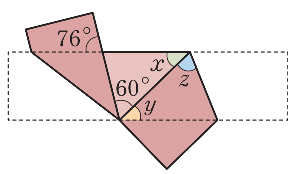
도전 문제

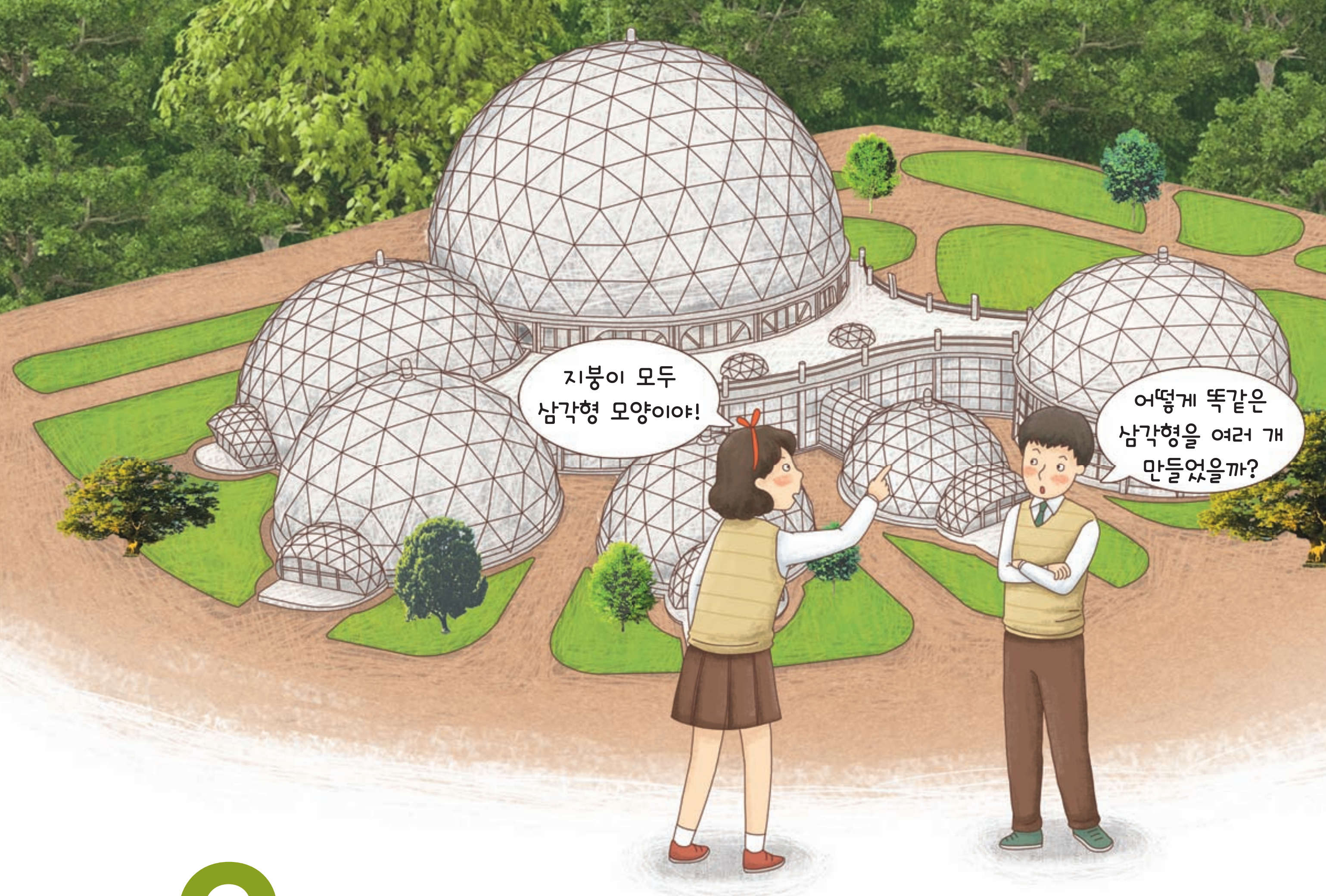
서술형 **11** 오른쪽과 같은 전개도로 만든 정육면체에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 면 LEJK와 평행한 모서리
(2) 면 LEJK와 수직인 모서리
(3) 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리



문제 해결 **12** 오른쪽 그림은 직사각형 모양의 종이를 접은 것이다. $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$의 크기를 구하시오.



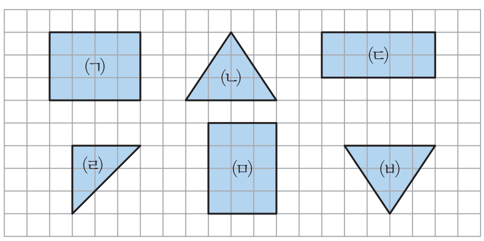


2 작도와 합동

준비 학습

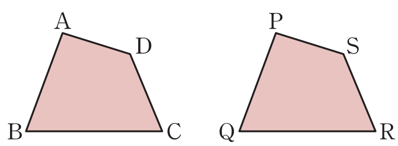
합동

❶ 다음에서 서로 합동인 도형끼리 짝 지으시오.



대응점, 대응변, 대응각

❷ 합동인 두 사각형 ABCD와 PQRS에 대하여 다음을 구하시오.



(1) 꼭짓점 A의 대응점

(2) 변 BC의 대응변

(3) 각 D의 대응각

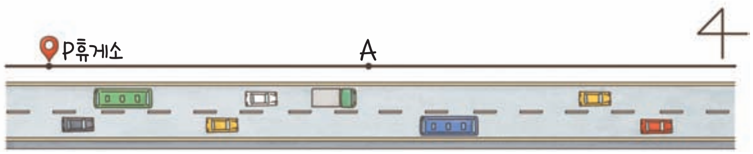
1 삼각형의 작도

삼각형을 작도할 수 있다.

작도

생각 톡

다음 그림과 같은 직선 도로에서 A지점의 서쪽에 P휴게소가 있다. A지점의 동쪽에 Q휴게소를 만드는데 A지점에서 P, Q 두 휴게소까지의 거리를 같게 하려고 한다.

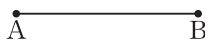


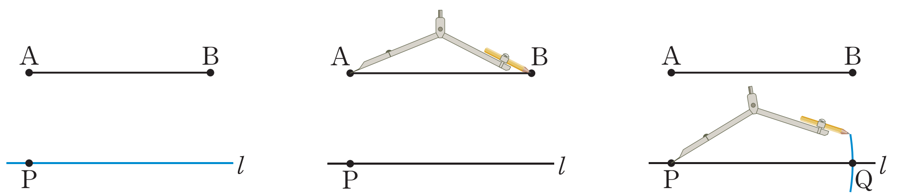
탐구 컴퍼스를 사용하여 Q휴게소의 위치를 표시해 보자.

눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것을 **작도**라고 한다. 이때 눈금 없는 자는 두 점을 연결하여 선분을 그리거나 선분을 연장할 때 사용하고, 컴퍼스는 원을 그리거나 선분의 길이를 재어서 옮길 때 사용한다.

주어진 선분과 길이가 같은 선분을 작도해 보자.

오른쪽 그림의 선분 AB와 길이가 같은 선분 PQ는 다음과 같이 작도할 수 있다.



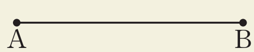


❶ 자로 직선 l을 긋고 그 위에 점 P를 잡는다.

❷ 컴퍼스를 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 잰다.

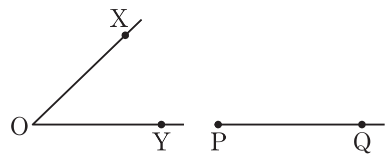
❸ 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AB}$인 원을 그려 직선 l과의 교점을 Q라고 하면 $\overline{PQ}$가 작도된다.

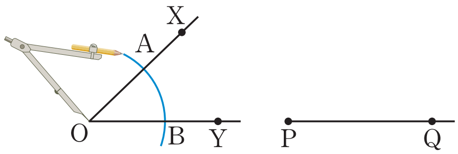
문제 1 **다음 그림의 선분 AB를 점 B의 방향으로 연장하여 $\overline{AC}=2\overline{AB}$가 되도록 선분 AC를 작도하시오.**



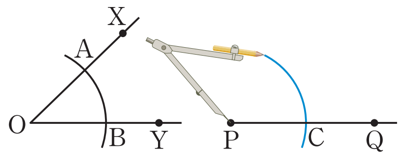
주어진 각과 크기가 같은 각을 작도해 보자.

오른쪽 그림의 $\angle XOY$와 크기가 같고 반직선 PQ를 한 변으로 하는 $\angle DPC$는 다음과 같이 작도할 수 있다.

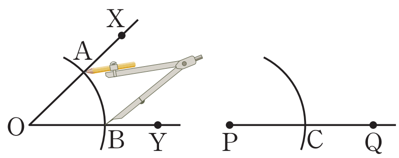




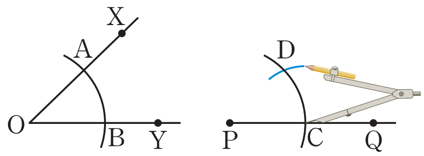
❶ 점 O를 중심으로 하는 적당한 원을 그려 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$와의 교점을 각각 A, B라고 한다.



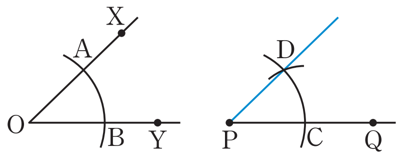
❷ 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{OA}$인 원을 그려 $\overrightarrow{PQ}$와의 교점을 C라고 한다.



❸ 두 점 A, B 사이의 거리를 잰다.

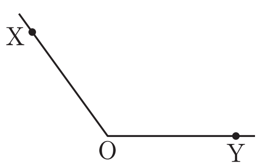


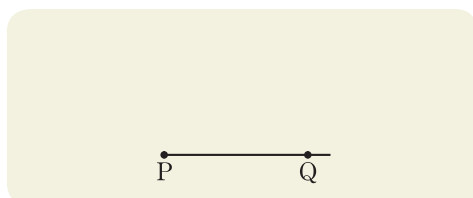
❹ 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AB}$인 원을 그려 ❷에서 그린 원과의 교점을 D라고 한다.



❺ $\overrightarrow{PD}$를 그리면 $\angle DPC$가 작도된다.

문제 2 **다음 그림의 $\angle XOY$와 크기가 같고 반직선 PQ를 한 변으로 하는 $\angle DPC$를 작도하시오.**



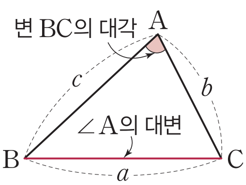


세 변의 길이가 주어진 삼각형의 작도

삼각형 ABC를 기호로 **△ABC**와 같이 나타낸다.

△ABC에서 ∠A와 마주 보는 변 BC를 ∠A의 **대변**이라 하고, ∠A를 변 BC의 **대각**이라고 한다.

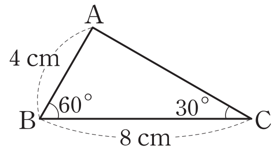
일반적으로 삼각형 ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 대변의 길이를 차례대로 a, b, c로 나타낸다.



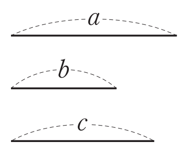
문제 3 **오른쪽 삼각형 ABC에서 다음을 구하시오.**

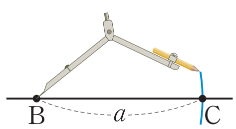
(1) ∠A의 대변의 길이

(2) 변 BC의 대각의 크기

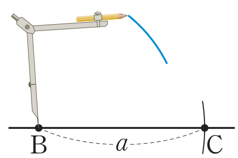


세 변의 길이가 오른쪽 그림과 같이 주어진 삼각형 ABC는 다음과 같이 작도할 수 있다.

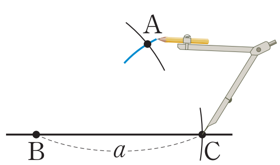




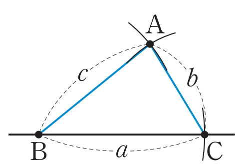
❶ 한 직선을 그리고 그 위에 길이가 a인 $\overline{BC}$를 작도한다.



❷ 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c인 원을 그린다.



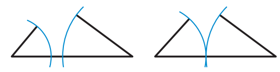
❸ 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 b인 원을 그려 ❷에서 그린 원과의 교점을 A라고 한다.



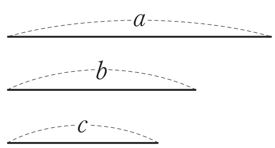
❹ 점 A와 점 B, 점 A와 점 C를 각각 이으면 △ABC가 작도된다.

위와 같이 삼각형의 세 변의 길이가 주어지면 삼각형은 하나로 작도된다.

참 고 오른쪽 그림과 같이 두 선분의 길이의 합이 다른 한 선분의 길이보다 작거나 같으면 그 세 선분을 세 변으로 하는 삼각형을 만들 수 없다.

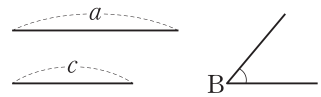


문제 4 세 변의 길이가 다음과 같은 삼각형 ABC를 작도하시오.

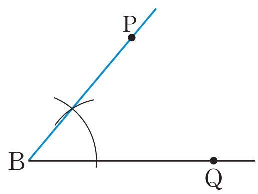


두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어진 삼각형의 작도

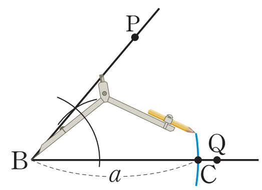
두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 오른쪽 그림과 같이 주어진 삼각형 ABC는 다음과 같이 작도할 수 있다.



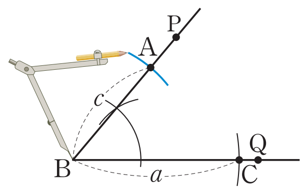
❶, ❷의 순서를 바꾸어서 작도해도 된다.



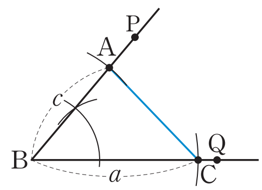
❶ ∠B와 크기가 같은 ∠PBQ를 작도한다.



❷ 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 a인 원을 그려 $\overrightarrow{BQ}$와의 교점을 C라고 한다.



❸ 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c인 원을 그려 $\overrightarrow{BP}$와의 교점을 A라고 한다.

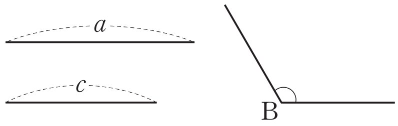


❹ 점 A와 점 C를 이으면 △ABC가 작도된다.

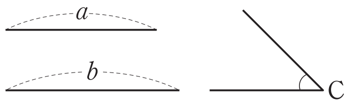
위와 같이 삼각형의 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어지면 삼각형은 하나로 작도된다.

문제 5 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 다음과 같은 삼각형 ABC를 작도하시오.

(1)

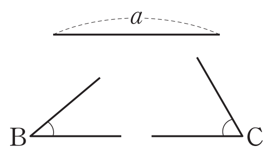


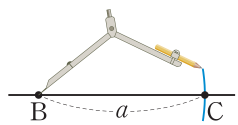
(2)



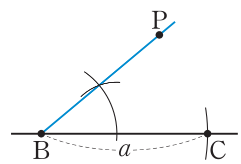
한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어진 삼각형의 작도

한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 오른쪽 그림과 같이 주어진 삼각형 ABC는 다음과 같이 작도할 수 있다.



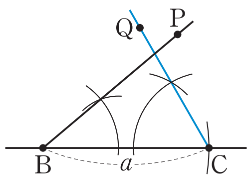


❶ 한 직선을 그리고 그 위에 길이가 a인 $\overline{BC}$를 작도한다.

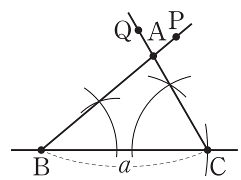


❷ ∠B와 크기가 같은 ∠PBC를 작도한다.

❶, ❷의 순서를 바꾸어서 작도해도 된다.



❸ ∠C와 크기가 같은 ∠QCB를 작도한다.

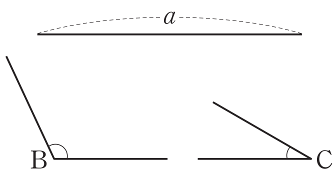


❹ $\overrightarrow{BP}$와 $\overrightarrow{CQ}$의 교점을 A라고 하면 △ABC가 작도된다.

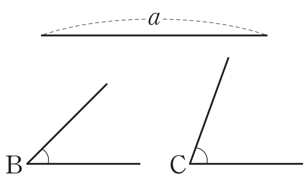
위와 같이 삼각형의 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어지면 삼각형은 하나로 작도된다.

문제 6 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 다음과 같은 삼각형 ABC를 작도하시오.

(1)



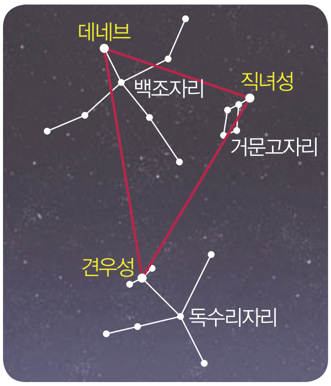
(2)



표현하기

모양과 크기가 같아서 완전히 포개어지는 두 도형은 합동이다.

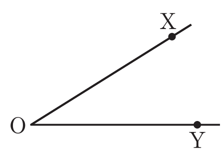
다음과 같이 여름철 북반구 밤하늘에서 쉽게 볼 수 있는 밝은 별인 데네브, 견우성, 직녀성을 이은 삼각형을 여름의 대삼각형이라고 한다. 이 삼각형과 합동인 삼각형을 작도하고 자신의 방법을 설명해 보자.



확인하기

1 한 변의 길이가 오른쪽 그림과 같은 정삼각형을 작도하시오.

2 크기가 오른쪽 그림의 $\angle XOY$의 크기의 2배인 각을 작도하시오.



수학 역량 플러스

숨겨진 보물을 찾아라

창의·융합 문제 해결

서진이는 다음과 같은 보물 지도를 만들어서 친구들에게 나누어 주었다. 설명에 따라서 자와 컴퍼스만을 이용하여 보물이 숨겨진 곳을 찾을 수 있을까?

❶ 세종 대왕 동상 A에서 타워 B와 같은 거리만큼 떨어져 있는 지하철역을 찾아라.

❷ ❶의 지하철역 C를 중심으로 빌딩 E와 국회의사당 D가 이루는 ∠ECD를 그려라.

❸ 학교 F와 선릉 G를 이은 반직선 FG를 한 변으로 하고 ∠ECD와 크기가 같은 ∠GFH를 공연장 I의 반대쪽으로 그려라.

❹ 보물은 직선 BI와 직선 FH가 만나는 곳에 숨겨져 있다.

활동 1 위의 지도에 보물이 숨겨진 곳을 표시해 보자.

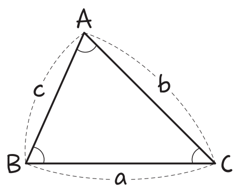
2 삼각형의 합동 조건

삼각형의 합동 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 합동인지 판별할 수 있다.

삼각형의 합동 조건

생각톡

삼각형 ABC에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형을 각각 작도할 수 있다.



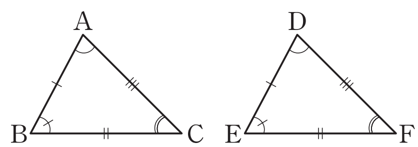
(가) 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형
(나) 두 변의 길이가 a, c이고 그 끼인각의 크기가 $\angle B$인 삼각형
(다) 한 변의 길이가 a이고 그 양 끝 각의 크기가 $\angle B$, $\angle C$인 삼각형

탐구 위의 세 조건 중 한 가지를 택하여 반투명 종이 위에 삼각형을 작도하고, 작도한 삼각형이 삼각형 ABC와 합동인지 확인해 보자.

두 삼각형 ABC와 DEF가 서로 합동일 때, 이것을 기호로

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

와 같이 나타낸다.



합동인 두 도형에서 서로 포개어지는 꼭짓점, 변, 각은 서로 대응한다고 하고, 합동을 기호로 나타낼 때에는 두 도형의 대응하는 꼭짓점의 순서를 맞추어 쓴다.

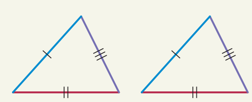
위의 생각톡의 세 조건 중에서 하나만 주어져도 합동인 삼각형을 작도할 수 있다. 따라서 두 삼각형에서 대응하는 세 변의 길이와 세 각의 크기를 모두 비교하지 않아도 합동인지 확인할 수 있다.

이상에서 다음과 같은 **삼각형의 합동 조건**을 얻을 수 있다.

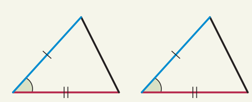
삼각형의 합동 조건

두 삼각형은 다음 각 경우에 서로 합동이다.

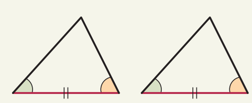
❶ 대응하는 세 쌍의 변의 길이가 각각 같을 때 (SSS 합동)



❷ 대응하는 두 쌍의 변의 길이가 각각 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 합동)

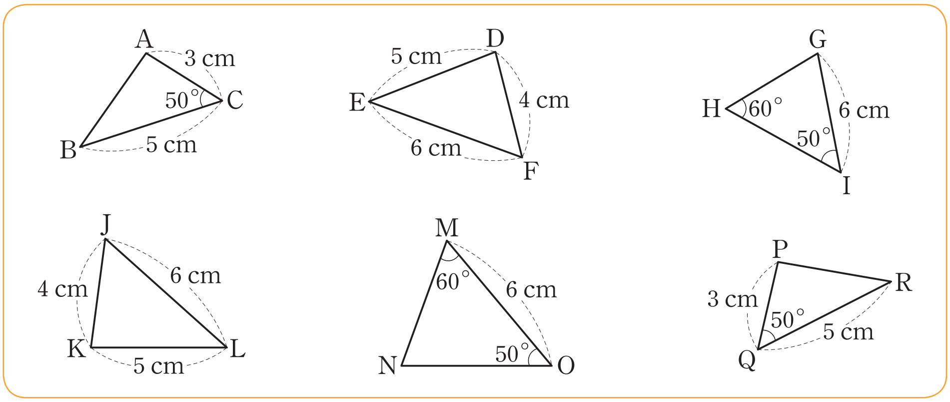


❸ 대응하는 한 쌍의 변의 길이가 같고 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때 (ASA 합동)

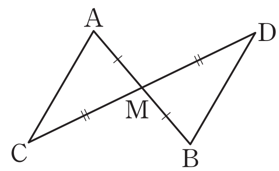


삼각형의 합동 조건에서
S는 side(변),
A는 angle(각)
의 첫 글자이다.

문제 1 다음 삼각형 중에서 서로 합동인 것을 찾아 기호 ≡를 사용하여 나타내고 각각의 합동 조건을 말하시오.



문제 2 오른쪽 그림에서 두 선분 **AB, CD**의 교점을 **M**이라고 할 때, $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{CM}=\overline{DM}$이다. 이때 $\triangle AMC\equiv\triangle BMD$임을 설명하고 합동 조건을 말하시오.



확인하기

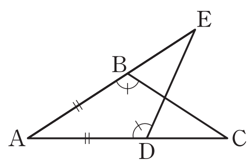
1 다음에서 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$인 경우를 모두 찾으시오.

(1) $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\overline{BC}=\overline{EF}$, $\angle B=\angle E$

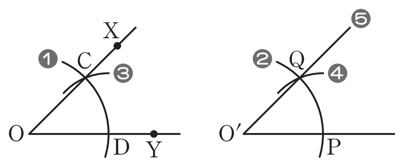
(2) $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\overline{AC}=\overline{DF}$, $\angle C=\angle F$

(3) $\overline{AC}=\overline{DF}$, $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle F$

2 오른쪽 그림에서 $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\angle ABC=\angle ADE$일 때, $\triangle ABC\equiv\triangle ADE$임을 설명하고 합동 조건을 말하시오.



사고력+ 오른쪽과 같은 순서로 크기가 같은 각을 작도할 때, $\angle XOY$의 크기와 $\angle QO'P$의 크기가 같은 이유를 삼각형의 합동을 이용하여 설명하시오.

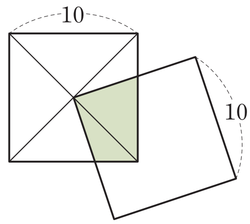


공학 도구 활용

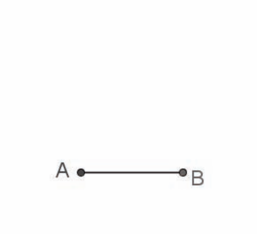
겹쳐진 부분의 넓이 구하기

정보 처리 추론

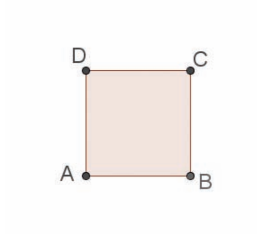
오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 10인 두 정사각형이 있다. 한 정사각형의 두 대각선의 교점에 다른 정사각형의 한 꼭짓점을 놓았을 때, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 겹쳐진 부분의 넓이를 구해 보자.



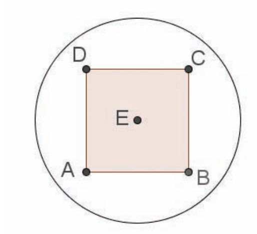
❶ 를 클릭하여 길이가 10인 선분 AB를 만든다.



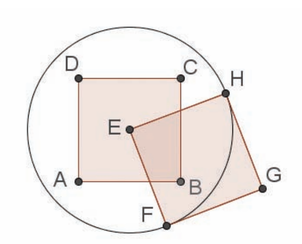
❷ 를 클릭하여 정사각형 ABCD를 만든다.



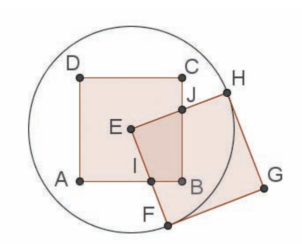
❸ 를 클릭하여 선분 AC의 중점 E를 만들고, 를 클릭하여 점 E를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원을 만든다.



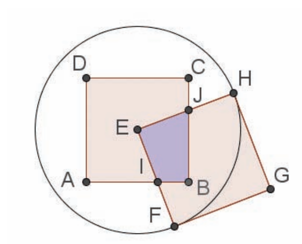
❹ 를 클릭하여 원 위에서 움직이는 점 F를 만들고, 를 클릭하여 $\overline{EF}$를 한 변으로 하는 정사각형을 만든다.



❺ 를 클릭하여 두 정사각형의 변의 교점 I, J를 만든다.

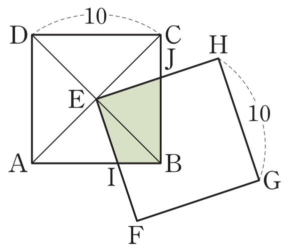


❻ 를 클릭하여 사각형 EIBJ를 만들고 를 클릭하여 넓이를 구한다.



활동 1 원 위의 점 F를 움직이면서 사각형 EIBJ의 넓이의 변화를 확인해 보자.

활동 2 오른쪽 그림에서 합동인 삼각형을 찾고 이를 이용하여 **활동 1** 의 결과를 설명해 보자.



중단원 마무리

Ⅳ-2 작도와 합동

정답 및 풀이 295쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

1 작도

162쪽

눈금 없는 자와 (　　　)만을 사용하여 도형을 그리는 것을 (　　　)라고 한다.

2 삼각형의 작도

164쪽

(1) △ABC에서 ∠A와 마주 보는 변 BC를 ∠A의 대변이라 하고 ∠A를 변 BC의 (　　　)이라고 한다.

(2) 다음의 조건 중 한 가지가 주어지면 삼각형을 한 가지 모양으로 작도할 수 있다.

① 세 변의 길이

② 두 변의 길이와 그 (　　　)의 크기

③ 한 변의 길이와 그 (　　　)의 크기

3 삼각형의 합동 조건

169쪽

두 삼각형은 다음 각 경우에 서로 합동이다.

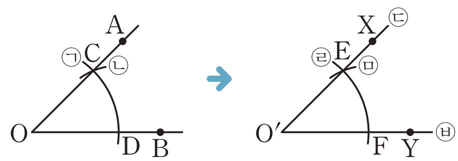
① 대응하는 세 쌍의 변의 길이가 각각 같을 때

② 대응하는 두 쌍의 변의 길이가 각각 같고 그 (　　　)의 크기가 같을 때

③ 대응하는 한 쌍의 변의 길이가 같고 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때

표준 문제

01 오른쪽 그림은 ∠AOB와 크기가 같은 ∠XO′Y를 작도하는 과정이다. 다음 중에서 옳지 않은 것은?



① $\overline{OC}=\overline{O'E}$

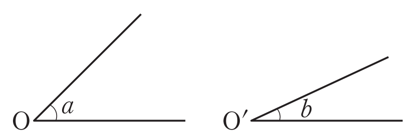
② $\overline{OD}=\overline{O'F}$

③ $\overline{CD}=\overline{EF}$

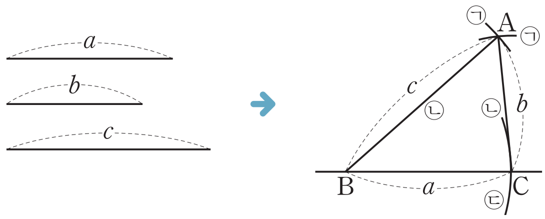
④ ∠COD=∠EO′F

⑤ 작도 순서는 ㉥－㉠－㉡－㉣－㉤－㉢이다.

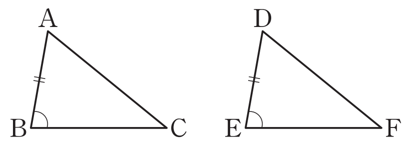
서술형 **02** $\angle a$, $\angle b$가 오른쪽 그림과 같을 때, $\angle a+\angle b$와 크기가 같은 각을 작도하고, 그 과정을 설명하시오.



03 다음은 세 변의 길이 a, b, c가 주어졌을 때, 삼각형 ABC를 작도하는 과정이다. 작도 순서에 맞게 ㉠, ㉡, ㉢을 나열하시오.

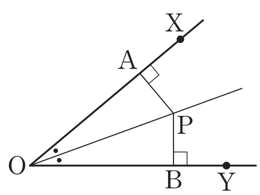


04 오른쪽 두 삼각형 ABC와 DEF가 $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\angle B=\angle E$일 때, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$가 되기 위하여 필요한 조건과 그때의 두 삼각형의 합동 조건을 바르게 나열한 것은?

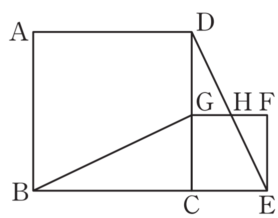


① $\overline{AC}=\overline{DF}$, SAS 합동
② $\overline{BC}=\overline{EF}$, ASA 합동
③ $\overline{AC}=\overline{EF}$, SAS 합동
④ $\angle C=\angle F$, ASA 합동
⑤ $\angle A=\angle D$, SAS 합동

추론 **05** 오른쪽 그림에서 점 P는 $\angle XOY$의 이등분선 위의 점이고, 두 점 A, B는 각각 점 P에서 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$에 내린 수선의 발이다. $\triangle AOP \equiv \triangle BOP$임을 설명하고 합동 조건을 말하시오.



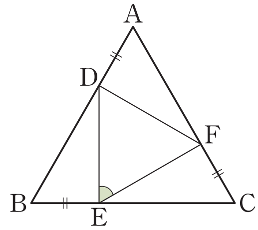
06 오른쪽 그림에서 두 사각형 ABCD와 GCEF가 정사각형일 때, 합동인 삼각형을 찾아 기호 ≡를 사용하여 나타내고 합동 조건을 말하시오.



서술형 **07** 오른쪽 정삼각형 ABC에서 각 변 위의 세 점 D, E, F에 대하여 $\overline{AD}=\overline{BE}=\overline{CF}$이다. 다음에 답하시오.

(1) △ADF와 합동인 삼각형을 모두 찾아 기호로 나타내시오.

(2) ∠DEF의 크기를 구하시오.

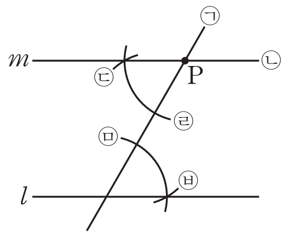


도전 문제

서술형 **08** 오른쪽 그림은 직선 l 밖의 한 점 P를 지나면서 직선 l에 평행한 직선 m을 작도하는 과정이다. 다음에 답하시오.

(1) 작도 순서에 맞게 ㉠~㉥을 나열하시오.

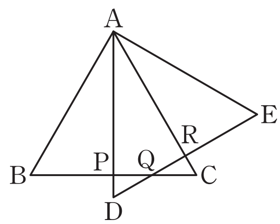
(2) 이 작도에 이용된 평행선의 성질을 말하시오.



09 오른쪽 표는 동석이가 갖고 있는 빨대의 길이와 개수를 나타낸 것이다. 동석이가 세 개의 빨대를 이용하여 삼각형을 만들 때, 만들 수 있는 서로 다른 삼각형의 개수를 구하시오.

빨대의 길이(cm)	3	7	9	10
개수	3	2	1	1

문제 해결 **10** 한 변의 길이가 같은 두 정삼각형 ABC와 ADE가 오른쪽 그림과 같을 때, 옳은 것을 보기에서 모두 고르시오.



보기

(ㄱ) $\overline{AP}=\overline{AR}$　　(ㄴ) $\overline{CP}=\overline{DR}$

(ㄷ) ∠DAC$=30°$

(ㄹ) (△ACP의 넓이)$=$(△AER의 넓이)

Ⅳ 기본 도형

대단원 마무리

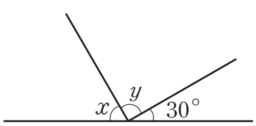
정답 및 풀이 296쪽

01 다음 중에서 아래 그림에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)

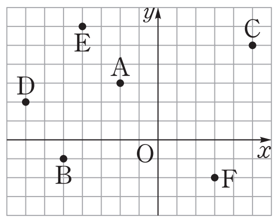
① $\overleftrightarrow{AB}=\overleftrightarrow{BC}$　② $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$　③ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$
④ $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$　⑤ $\overline{BC}=\overline{CB}$

02 다음 그림에서 점 M은 $\overline{AB}$의 중점이고, 점 P와 점 Q는 각각 $\overline{AM}$과 $\overline{PB}$의 중점이다. $\overline{AB}=12$ cm일 때, $\overline{MQ}$의 길이를 구하시오.

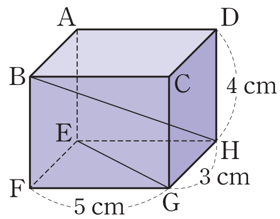
03 다음 그림에서 $\angle x : \angle y=2:3$일 때, $\angle x$의 크기를 구하시오.



04 오른쪽 좌표평면 위의 6개의 점 A, B, C, D, E, F에 대하여 x축과의 거리가 가장 가까운 점과 y축과의 거리가 가장 먼 점을 차례대로 나열하시오.

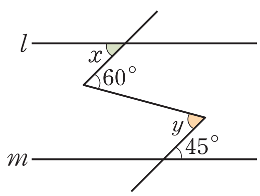


05 오른쪽 직육면체에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

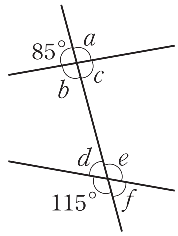


① 선분 EG와 면 ABCD는 평행하다.
② 모서리 AE와 면 CGHD는 평행하다.
③ 모서리를 연장한 직선 중 직선 BH와 꼬인 위치에 있는 직선은 6개이다.
④ 직선 EG와 직선 AD는 한 평면 위에 있다.
⑤ 점 C와 직선 DH 사이의 거리는 3 cm이다.

06 오른쪽 그림에서 $l \,/\!/\, m$일 때, $\angle x+\angle y$의 크기를 구하시오.



07 오른쪽 그림에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?



① $\angle a$의 동위각은 $\angle e$이다.
② $\angle c$의 엇각은 $\angle d$이다.
③ $\angle b$의 동위각의 크기는 $115°$이다.
④ $\angle e$의 엇각의 크기는 $95°$이다.
⑤ $\angle f$의 맞꼭지각의 크기는 $85°$이다.

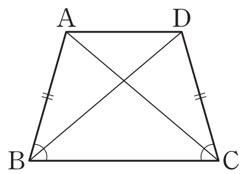
08 변 BC의 길이와 그 양 끝 각 ∠B, ∠C의 크기가 주어진 삼각형 ABC를 작도하려고 한다. 다음 중 작도 순서로 옳지 않은 것은?

① $\overline{BC} \rightarrow \angle B \rightarrow \angle C$
② $\overline{BC} \rightarrow \angle C \rightarrow \angle B$
③ $\angle B \rightarrow \overline{BC} \rightarrow \angle C$
④ $\angle C \rightarrow \overline{BC} \rightarrow \angle B$
⑤ $\angle B \rightarrow \angle C \rightarrow \overline{BC}$

09 다음 중에서 삼각형 ABC가 하나로 정해지는 조건을 모두 고르면? (정답 2개)

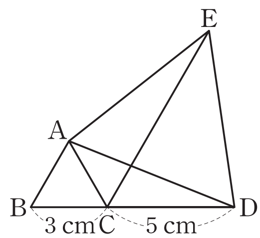
① $\overline{AB}=3\text{ cm}$, $\overline{BC}=5\text{ cm}$, $\overline{CA}=8\text{ cm}$
② $\overline{AB}=4\text{ cm}$, $\overline{BC}=10\text{ cm}$, $\overline{CA}=7\text{ cm}$
③ $\angle A=45°$, $\angle B=60°$, $\angle C=75°$
④ $\overline{AB}=6\text{ cm}$, $\overline{BC}=8\text{ cm}$, $\angle C=90°$
⑤ $\overline{AB}=5\text{ cm}$, $\angle A=60°$, $\angle C=80°$

10 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$인 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\angle ABC=\angle DCB$일 때, 다음 중에서 옳지 않은 것은?



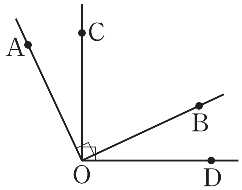
① $\angle ADB=\angle DCA$ ② $\angle BAD=\angle CDA$
③ $\angle DAC=\angle ACB$ ④ $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$
⑤ $\triangle DAB \equiv \triangle ADC$

11 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABC에서 변 BC의 연장선 위에 점 D를 잡고, $\overline{AD}$를 한 변으로 하는 정삼각형 ADE를 그렸다. $\overline{BC}=3\text{ cm}$, $\overline{CD}=5\text{ cm}$일 때, $\overline{CE}$의 길이를 구하시오.



서술형

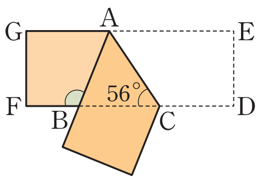
12 오른쪽 그림에서 $\overline{OA}\perp\overline{OB}$, $\overline{OC}\perp\overline{OD}$이고 $\angle AOC+\angle BOD=50°$일 때, 다음 각의 크기를 구하시오.



(1) $\angle AOC$ (2) $\angle COB$

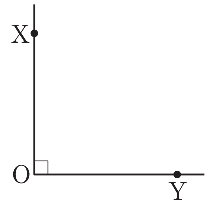
풀이

13 오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 종이테이프를 선분 AC를 접는 선으로 하여 접었다. 이때 $\angle ABF$의 크기를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



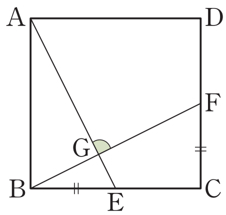
풀이

14 오른쪽 그림에서 $\angle XOY=90°$일 때, $\angle XOY$의 삼등분선을 작도하고 그 과정을 설명하시오.



풀이

15 오른쪽 정사각형 ABCD에서 $\overline{BE}=\overline{CF}$이다. $\overline{AE}$와 $\overline{BF}$의 교점을 G라고 할 때, $\angle AGF$의 크기를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 점, 선, 면, 각의 뜻을 알 수 있다.			
❷ 도형의 위치 관계와 평행선의 성질을 알 수 있다.			
❸ 주어진 조건에 맞게 삼각형을 작도할 수 있다.			
❹ 삼각형의 합동 조건을 알 수 있다.			

보충 계획

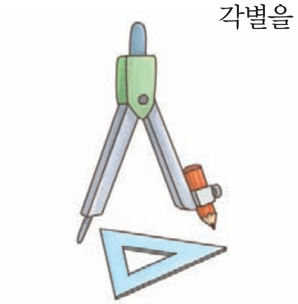
부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

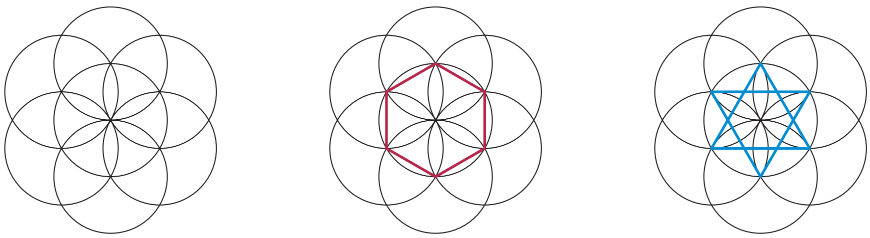
창의·융합 프로젝트

다양한 문양 만들기

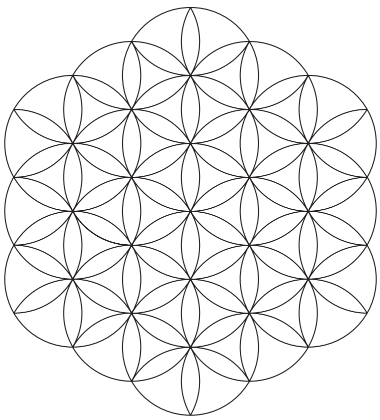
고대 그리스인들은 유클리드의 도구라고 불리는 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 도형을 그리고 그 성질을 탐구하였다.

다음 그림과 같이 컴퍼스로 크기가 같은 7개의 원을 그리면 눈금 없는 자를 이용하여 정육각형과 육각별을 각각 작도할 수 있다.

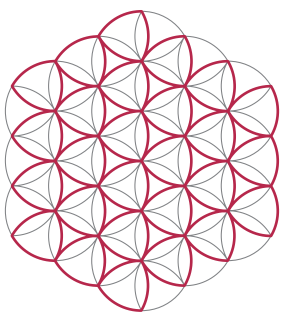




과제 1 다음 그림과 같은 도형을 작도해 보자.



과제 2 **과제 1**에서 작도한 도형의 일부를 이용하여 자신만의 문양을 만들고 이를 이용하여 자신의 미래의 명함을 디자인해 보자.

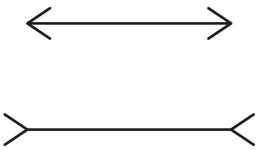


세상 속 수학

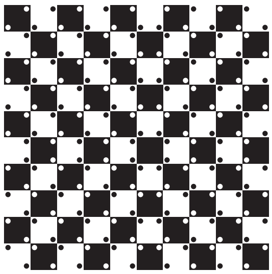
Math X Art

눈에 보이는 것을 그대로 믿을 수는 없다

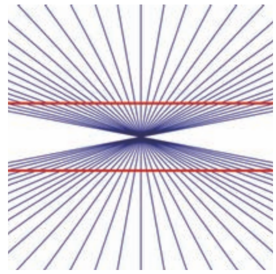
[그림 1]의 화살촉 사이의 두 선분의 길이는 달라 보이지만 자로 재어 보면 같음을 확인할 수 있다. 또 [그림 2]의 정사각형의 경계로 이루어진 선은 곡선처럼 보이지만 실제로는 직선이고, [그림 3]의 두 빨간 선은 휘어진 것처럼 보이지만 실제로는 평행한 직선이다.



[그림 1]



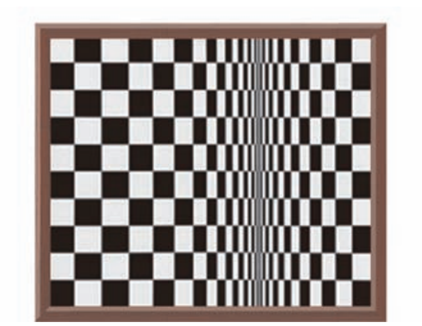
[그림 2]



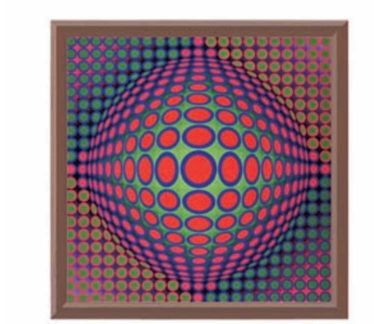
[그림 3]

이처럼 대상을 눈으로 보았을 때 크기나 형태 등의 객관적인 성질이 실제와 다르게 보이는 것을 착시라고 한다. 착시는 우리 뇌가 물체를 인식할 때 주변 환경을 고려하여 판단하기 때문에 발생한다.

착시 현상은 건축물, 광고, 예술, 심리 치료 등의 다양한 분야에서 이용되고 있다. 특히 착시 현상을 이용하여 움직이는 효과를 창조하는 옵아트(op art)는 1960년대 중반부터 발달하여 패션이나 인테리어 디자인 등에 이용되고 있다.



라일리(Riley, B., 1931~)의
「Movement in squares」



바자렐리(Vasarely, V., 1908~1997)의
「Vega-200」

진로 탐색

옵아트 작가 | 선, 사각형, 원 등 기하학적 구조의 형태, 공간, 색채를 변형시켜 옵아트 작품을 만들고, 다양한 분야의 디자인 작업에 참여한다.

V 평면도형

배운 내용 — **이 단원의 내용** — **배울 내용**

초 3~4
- 원
- 삼각형
- 사각형
- 다각형

초 5~6
- 원주율
- 원의 넓이

1 다각형
- 다각형
- 다각형의 내각과 외각의 크기

2 원과 부채꼴
- 원과 부채꼴
- 부채꼴의 호의 길이와 넓이

중 2
- 삼각형과 사각형의 성질
- 도형의 닮음
- 피타고라스 정리

중 3
- 삼각비
- 원의 성질

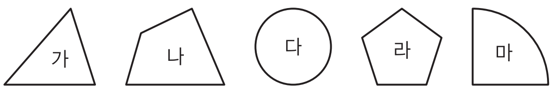

야구장에서는 사각형, 오각형 등의 여러 가지 **다각형**과 **원**을 찾아볼 수 있다.
이 단원에서는 다각형과 원의 여러 가지 성질을 알아본다.
TEAM

1 다각형

준비 학습

다각형

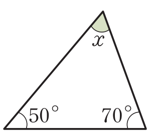
❶ 오른쪽에서 다각형을 찾아 각각의 꼭짓점과 변의 개수를 구하시오.



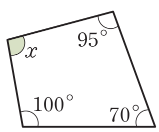
삼각형과 사각형의 각

❷ 다음 다각형에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)



(2)



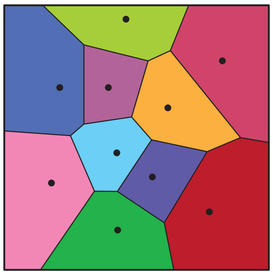
1 다각형

다각형의 내각과 외각을 뜻을 알고, 대각선의 개수를 구할 수 있다.

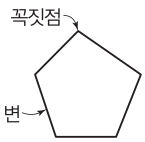
다각형

생각톡

평면 위에 여러 개의 점을 찍고 가장 인접한 두 개의 점을 택하여 두 점을 연결한 선분의 수직이등분선을 그리면 불규칙한 다각형으로 이루어진 그림을 얻을 수 있는데, 이 그림을 보로노이 다이어그램이라고 한다. 다음은 10개의 점으로 만든 보로노이 다이어그램이다.



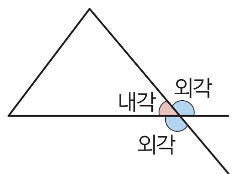
탐구 위의 그림에서 찾을 수 있는 다각형을 말해 보자.



여러 개의 선분으로 둘러싸인 평면도형을 다각형이라고 한다.

이때 변이 3개, 4개, ⋯, n개인 다각형을 각각 삼각형, 사각형, ⋯, n각형이라고 한다.

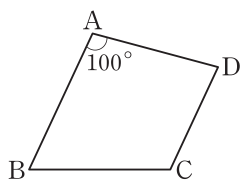
다각형에서 이웃하는 두 변이 이루는 내부의 각을 그 다각형의 **내각**이라 하고, 이웃하는 두 변에서 한 변과 다른 한 변의 연장선이 이루는 각을 그 내각의 **외각**이라고 한다.



한 내각에 대한 외각은 두 개이지만 맞꼭지각으로 크기가 같으므로 하나만 생각한다.

참고 다각형의 한 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 $180°$이다.

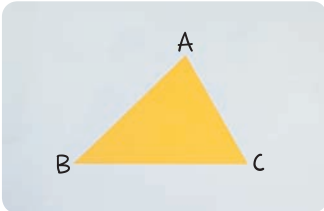
문제 1 **오른쪽 사각형 ABCD에서 $\angle$A의 외각을 표시하고, 그 크기를 구하시오.**



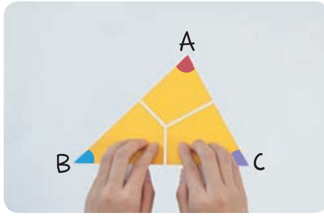
삼각형의 내각과 외각의 관계

생각톡

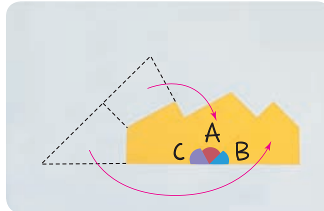
다음은 삼각형의 세 내각을 한 점에 모으는 활동이다.



❶ 삼각형을 만든다.



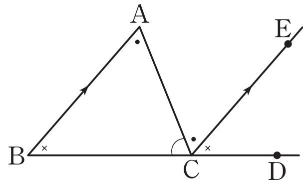
❷ 삼각형을 세 조각으로 나눈다.



❸ 세 내각을 한 점에 모은다.

탐구 ∠C의 외각의 크기와 ∠A, ∠B의 크기 사이의 관계를 말해 보자.

위의 생각톡에서 ∠C의 외각의 크기는 ∠A와 ∠B의 크기의 합과 같음을 알 수 있다. 평행선의 성질을 이용하여 이를 확인해 보자.



오른쪽 그림과 같이 △ABC에서 변 BC의 연장선 위에 점 D를 잡고 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 반직선 CE를 그으면

$$\angle A = \angle ACE \text{ (엇각)},$$

$$\angle B = \angle ECD \text{ (동위각)}$$

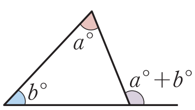
이므로 다음이 성립한다.

$$\angle A + \angle B = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$$

$\angle A + \angle B + \angle C$
$= \angle ACD + \angle ACB$
$= 180^\circ$

따라서 ∠C의 외각의 크기는 ∠A와 ∠B의 크기의 합과 같음을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

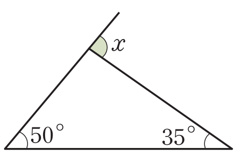


삼각형의 내각과 외각의 관계

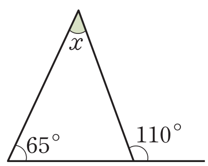
삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

문제 2 다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

(1)



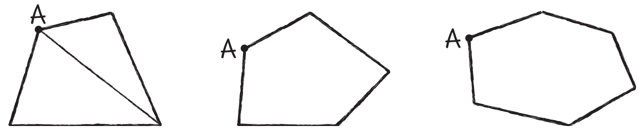
(2)



다각형의 대각선의 개수

생각톡

다음은 사각형, 오각형, 육각형의 한 꼭짓점 A를 나타낸 것이다.



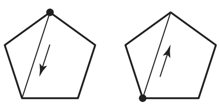
탐구 ① 각 다각형의 꼭짓점 A에서 그을 수 있는 대각선을 모두 그리고, 아래 표를 완성해 보자.

다각형	사각형	오각형	육각형
꼭짓점의 개수	4		
한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수	1		

탐구 ② n각형의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수를 추측해 보자.

대각선은 다각형에서 이웃하지 않은 두 꼭짓점을 이은 선분이다.

한 대각선은 두 꼭짓점에서 그을 수 있다.



위의 생각톡에서 n각형의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선은 $(n-3)$개이므로 각 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수의 합은 $n(n-3)$임을 알 수 있다. 이 개수는 한 대각선을 두 번씩 센 것이므로 실제 대각선의 개수는 다음과 같다.

$$(n\text{각형의 대각선의 개수})=\frac{n(n-3)}{2}$$

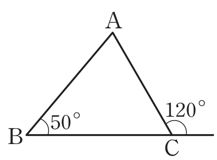
보기 오각형의 대각선의 개수는 $\frac{5\times(5-3)}{2}=5$

문제 3 **다음 다각형의 대각선의 개수를 구하시오.**

(1) 팔각형 (2) 십각형 (3) 십일각형

확인하기

1 오른쪽 삼각형 ABC에서 ∠A의 외각의 크기를 구하시오.



2 대각선이 14개인 다각형을 구하시오.

사고력+ 정팔각형과 정구각형에서 길이가 서로 다른 대각선의 개수를 각각 구하시오.

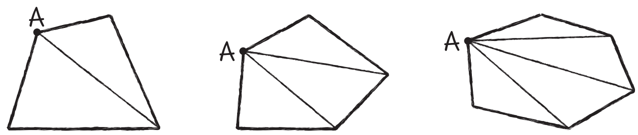
2 다각형의 내각과 외각의 크기

다각형의 내각과 외각의 크기의 합을 구할 수 있다.

다각형의 내각의 크기의 합

생각톡

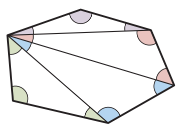
다음은 사각형, 오각형, 육각형의 한 꼭짓점 A에서 대각선을 모두 그어 다각형을 여러 개의 삼각형으로 나눈 것이다.



탐구 ① 아래 표를 완성해 보자.

다각형	사각형	오각형	육각형
꼭짓점의 개수	4		
삼각형의 개수	2		

탐구 ② n각형의 한 꼭짓점에서 그은 대각선은 n각형을 몇 개의 삼각형으로 나누는지 추측해 보자.



위의 생각톡에서 사각형, 오각형, 육각형은 한 꼭짓점에서 그은 대각선에 의하여 각각 2개, 3개, 4개의 삼각형으로 나누어지므로 그 내각의 크기의 합은 각각

$$180^\circ \times 2 = 360^\circ,\ 180^\circ \times 3 = 540^\circ,\ 180^\circ \times 4 = 720^\circ$$

이다.

일반적으로 n각형의 한 꼭짓점에서 대각선을 모두 그으면 n각형이 $(n-2)$개의 삼각형으로 나누어지므로 n각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ \times (n-2)$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

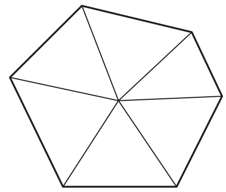
다각형의 내각의 크기의 합

n각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ \times (n-2)$이다.

문제 1 다음 다각형의 내각의 크기의 합을 구하시오.

(1) 칠각형 (2) 십각형 (3) 십이각형

추론
문제 2 오른쪽 그림과 같이 육각형을 6개의 삼각형으로 나누고, 내각의 크기의 합을 다음과 같이 구하였다. 이 방법을 설명하시오.



$$180^\circ \times 6 - 360^\circ = 720^\circ$$

변의 길이가 모두 같고 각의 크기가 모두 같은 다각형을 정다각형이라고 한다.

정다각형은 내각의 크기가 모두 같으므로 한 내각의 크기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\text{정}n\text{각형의 한 내각의 크기}) = \frac{180^\circ \times (n-2)}{n}$$

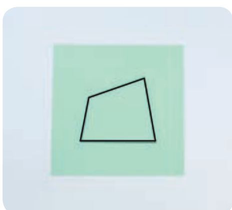
보기 정육각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = 120^\circ$이다.

문제 3 정팔각형의 한 내각의 크기를 구하시오.

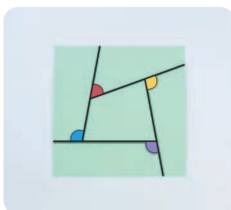
다각형의 외각의 크기의 합

생각톡

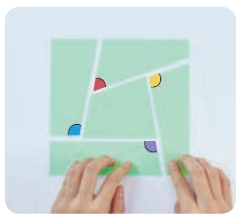
다음은 사각형의 외각을 잘라서 한 점에 모으는 활동이다.



❶ 색종이에 사각형을 그린다.



❷ 네 외각을 표시한다.



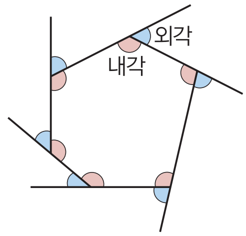
❸ 네 외각을 오린다.

❹ 네 외각을 겹치지 않게 한 꼭짓점에 모은다.

탐구 ① 위의 활동에서 사각형의 외각의 크기의 합을 말해 보자.

탐구 ② 오각형에 대하여 위와 같은 활동으로 외각의 크기의 합을 구하고, **탐구 ①**의 결과와 비교해 보자.

앞의 생각톡에서 사각형과 오각형의 외각의 크기의 합이 모두 $360°$임을 알 수 있다.



일반적으로 다각형의 한 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 $180°$로 일정하고, n각형의 꼭짓점은 n개이므로

$$(\text{내각의 크기의 합})+(\text{외각의 크기의 합})=180°\times n$$

이다. 그런데 n각형의 내각의 크기의 합은 $180°\times(n-2)$이므로 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}(\text{외각의 크기의 합})&=180°\times n-(\text{내각의 크기의 합})\\&=180°\times n-180°\times(n-2)\\&=360°\end{aligned}$$

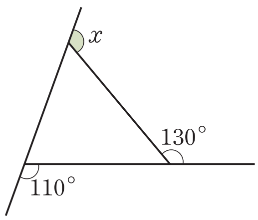
이상을 정리하면 다음과 같다.

다각형의 외각의 크기의 합

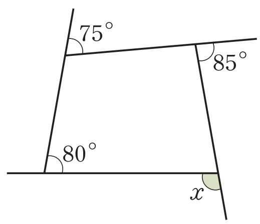
n각형의 외각의 크기의 합은 $360°$이다.

문제 4 **다음 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.**

(1)



(2)



정다각형은 외각의 크기가 모두 같으므로 한 외각의 크기는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\text{정}n\text{각형의 한 외각의 크기})=\frac{360°}{n}$$

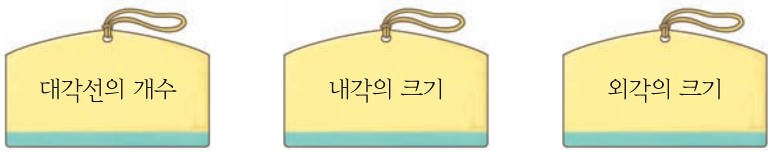
문제 5 다음 정다각형에서 한 외각의 크기를 구하시오.

(1) 정오각형　　(2) 정구각형

문제 6 한 외각의 크기가 $18°$인 정다각형을 구하시오.

문제 만들기

다음 카드에 적힌 말을 이용하여 정십각형에 대한 문제를 만들어 보자.

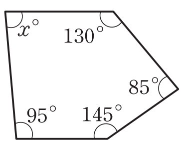


예 대각선의 개수가 35인 정다각형의 한 내각의 크기를 구하시오.

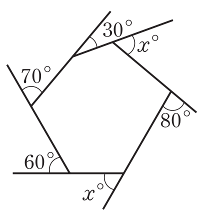
확인하기

1 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)



(2)



2 정십이각형의 한 내각의 크기와 한 외각의 크기를 구하시오.

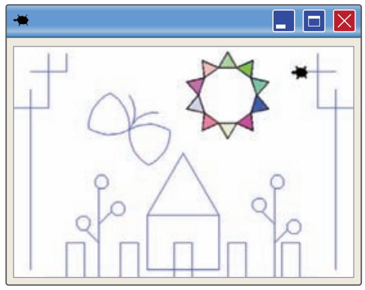
공학 도구 활용

컴퓨터 프로그램으로 **다각형 그리기**

정보 처리 · 추론

컴퓨터 프로그램을 이용하여 여러 가지 다각형을 그려 보자.

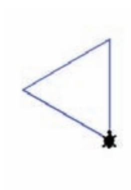
다음과 같은 명령어에 따라 거북이가 움직이면서 도형을 그리는 프로그램이 있다.



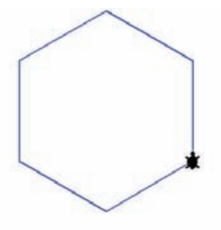
명령어	실행
가자 x	x만큼 앞으로 가면서 선분을 그린다.
돌자 y	시곗바늘이 도는 반대 방향으로 $y°$만큼 머리 방향을 돌린다.
반복 n{명령}	명령을 n번 반복해서 실행한다.

예를 들어 한 변의 길이가 50인 정삼각형과 정육각형은 다음과 같이 그릴 수 있다.

반복 3 {가자 50; 돌자 120}



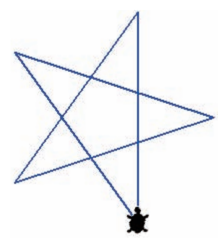
반복 6 {가자 50; 돌자 60}



활동 1 위의 프로그램에서 정다각형의 한 외각의 크기와 거북이가 회전한 각의 크기 사이의 관계를 설명하고, 거북이가 제자리로 돌아올 때까지 회전한 각의 크기의 합을 구해 보자.

활동 2 위의 프로그램으로 한 변의 길이가 50인 정오각형과 정십각형을 그리기 위한 명령어를 말해 보자.

활동 3 오른쪽 그림은 정오각형을 이용하여 그린 도형이다. 이 도형을 그리기 위한 명령어를 말하고, 컴퓨터로 실행하여 주어진 도형과 비교해 보자.



정답 및 풀이 298쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

1 다각형의 내각과 외각 183쪽

(1) ☐ : 다각형의 이웃하는 두 변이 이루는 내부의 각

(2) ☐ : 다각형의 한 변과 이웃하는 다른 한 변의 연장선이 이루는 각

2 삼각형의 내각과 외각의 관계 184쪽

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 ☐의 크기의 합과 같다.

3 다각형의 대각선의 개수 185쪽

(1) n각형의 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수 : ☐

(2) n각형의 대각선의 개수 : ☐

4 다각형의 내각과 외각의 크기 186쪽

(1) n각형의 내각의 크기의 합 : ☐

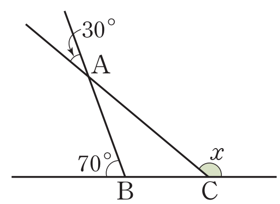
(2) 정n각형의 한 내각의 크기 : ☐

(3) n각형의 외각의 크기의 합 : ☐

(4) 정n각형의 한 외각의 크기 : ☐

표준 문제

01 오른쪽 그림에서 $\angle x$의 크기를 구하시오.

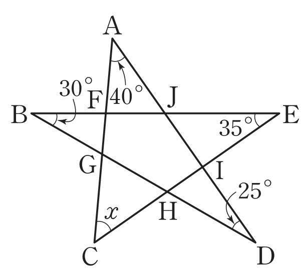


서술형 **02** 오른쪽 그림에서 다음 각의 크기를 구하시오.

(1) $\angle$AGB

(2) $\angle$EHD

(3) $\angle x$

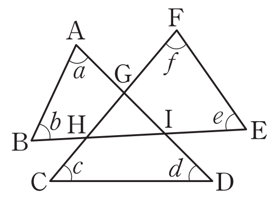


03 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선이 10개인 다각형의 대각선의 개수를 구하시오.

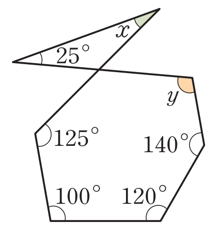
04 오른쪽 그림에서

$$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f$$

의 크기를 구하시오.

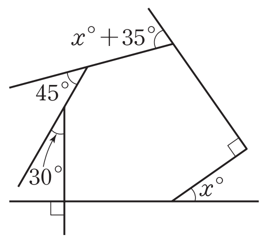


문제 해결 **05** 오른쪽 그림에서 $\angle y-\angle x$의 크기를 구하시오.

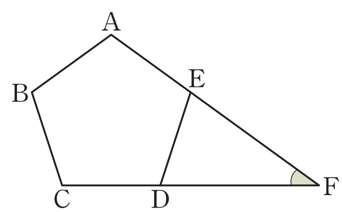


06 대각선이 27개인 정다각형의 한 내각의 크기를 구하시오.

07 오른쪽 그림에서 x의 값을 구하시오.



08 오른쪽 그림과 같이 정오각형 ABCDE에서 두 변 AE와 CD의 연장선의 교점을 F라고 할 때, $\angle$F의 크기를 구하시오.



서술형 **09** 한 내각의 크기와 한 외각의 크기의 비가 13 : 2인 정다각형에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 대각선의 개수

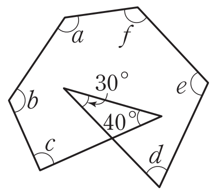
(2) 내각의 크기의 합

도전 문제

10 오른쪽 그림에서

$$\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f$$

의 크기를 구하시오.

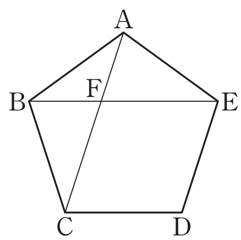


서술형 **11** 오른쪽 정오각형 ABCDE에서 $\overline{AC}$와 $\overline{BE}$의 교점을 F라고 할 때, 다음에 답하시오.

(1) $\angle$AFE의 크기를 구하시오.

(2) $\angle$ACD의 크기를 구하시오.

(3) $\overleftrightarrow{BE} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$임을 설명하시오.



추론 **12** 어떤 다각형에서 다음 두 수의 합이 25이다. 이 다각형의 대각선의 개수를 구하시오.

- 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선의 개수
- 한 꼭짓점에서 대각선을 모두 그었을 때 생기는 삼각형의 개수

2 원과 부채꼴

준비 학습

비례식

❶ 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

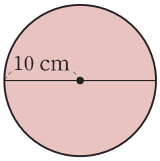
(1) 18 : □=3 : 2

(2) 2 : 7=□ : 28

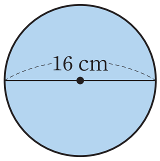
원의 둘레의 길이와 넓이

❷ 다음 원의 둘레의 길이와 넓이를 구하시오. (단, 원주율은 3.14로 계산한다.)

(1)



(2)



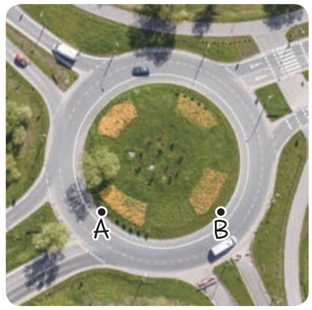
1 원과 부채꼴

부채꼴의 중심각과 호의 관계를 이해한다.

호와 현, 부채꼴과 활꼴

생각 톡

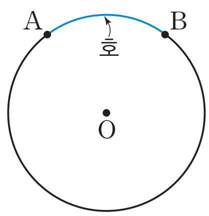
회전 교차로에서 자동차는 중앙에 있는 원형 섬 주위를 일정한 방향으로 주행하다가 원하는 출구로 나갈 수 있다.
오른쪽 회전 교차로에 꽃을 심으려고 한다.



탐구 ① A지점에서 B지점까지 원형 섬의 둘레를 따라 꽃을 심을 때, 꽃을 심을 자리를 표시해 보자.

탐구 ② 두 지점 A, B를 이은 선분 위에 꽃을 심을 때, 꽃을 심을 자리를 표시해 보자.

원은 평면 위의 한 점 O로부터 일정한 거리에 있는 모든 점으로 이루어진 도형이고, 이것을 원 O로 나타낸다.

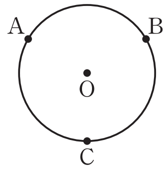


원 위의 두 점은 원을 두 부분으로 나누는데 이 두 부분을 각각 **호**라고 한다. 두 점 A, B를 양 끝 점으로 하는 호를 호 AB라 하고, 이것을 기호로

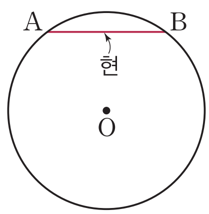
$$\overset{\frown}{AB}$$

와 같이 나타낸다.

$\overset{\frown}{AB}$는 보통 길이가 짧은 쪽의 호를 나타내고, 길이가 긴 쪽의 호를 나타낼 때에는 그 호 위에 한 점 C를 잡고 $\overset{\frown}{ACB}$와 같이 나타낸다.

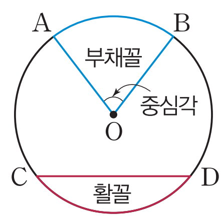


또 원 위의 두 점을 이은 선분을 **현**이라 하고 두 점 A, B를 양 끝 점으로 하는 현을 현 AB라고 한다. 특히 원의 중심을 지나는 현은 그 원의 지름이다.

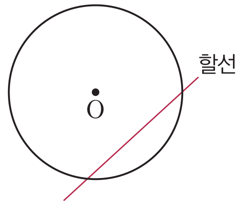


원 O에서 두 반지름 OA, OB와 호 AB로 이루어진 도형을 **부채꼴** AOB라고 한다. 이때 ∠AOB를 부채꼴 AOB의 **중심각** 또는 호 AB에 대한 중심각이라 하고, 호 AB를 ∠AOB에 대한 호라고 한다.

또 현 CD와 호 CD로 이루어진 도형을 **활꼴**이라고 한다.



한편 한 직선이 원 O와 두 점에서 만날 때, 이 직선을 원 O의 **할선**이라고 한다.



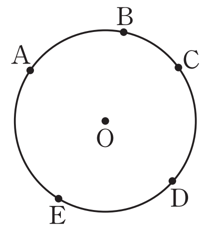
문제 1 **다음을 오른쪽 원 O에 나타내시오.**

(1) 호 AB

(2) 현 CD

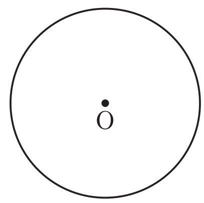
(3) 부채꼴 BOC

(4) 호 EAC에 대한 중심각



추론

문제 2 **부채꼴이면서 동시에 활꼴인 경우를 오른쪽 원 O에 그리시오.**



이야기 수학

부채꼴 모양의 좌석 배치

고대 로마에서는 시합이나 공연을 위하여 부채꼴 모양으로 좌석을 배치한 극장을 만들었다. 이는 중심으로부터 거리가 일정하다는 원의 성질을 이용한 것인데, 부채꼴 모양으로 좌석을 배치하면 무대의 소리가 객석에 고르게 잘 들리고 멀리서도 무대가 잘 보인다는 장점이 있다.

오늘날에도 강당이나 연주회장의 좌석을 부채꼴 모양으로 배치하는 경우가 많다.


국회 본회의장

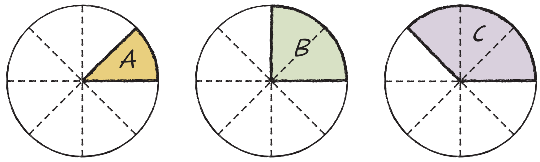

불가리아 플로브디프의 원형극장


런던 로열 앨버트홀

부채꼴의 성질

생각 톡

오른쪽은 반지름의 길이가 같은 세 원을 각각 모양이 같은 8개의 부채꼴로 나눈 후 세 원에서 부채꼴 A, B, C를 정한 것이다.

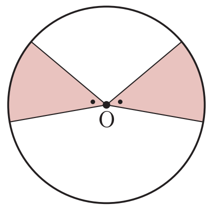


탐구 ① 두 부채꼴 B, C의 중심각의 크기는 부채꼴 A의 중심각의 크기의 몇 배인지 각각 말해 보자.

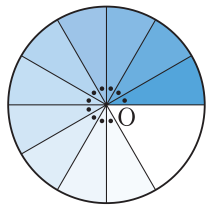
탐구 ② 두 부채꼴 B, C의 호의 길이는 부채꼴 A의 호의 길이의 몇 배인지 각각 말해 보자.

탐구 ③ 두 부채꼴 B, C의 넓이는 부채꼴 A의 넓이의 몇 배인지 각각 말해 보자.

한 원에서 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴은 서로 합동이다. 따라서 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 같다. 또 한 원에서 호의 길이가 같거나 넓이가 같은 두 부채꼴의 중심각의 크기는 같다.



한편 한 원에서 중심각의 크기가 2배, 3배, 4배, …가 되면 부채꼴의 호의 길이와 넓이도 각각 2배, 3배, 4배, …가 된다. 즉 한 원에서 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 중심각의 크기에 정비례한다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

부채꼴의 성질

한 원에서

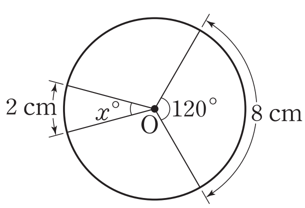
❶ 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 같다.

❷ 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 중심각의 크기에 정비례한다.

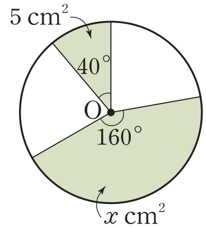
한 원에서와 마찬가지로 합동인 두 원에서도 부채꼴의 성질이 성립한다.

문제 3 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)



(2)

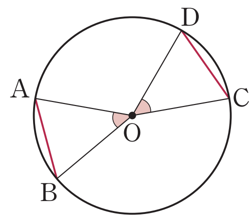


오른쪽 원 O에서 $\angle AOB$와 $\angle COD$의 크기가 같으면 $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$이므로 현 AB와 현 CD의 길이는 같다.

즉 중심각의 크기가 같은 두 현의 길이는 같다.

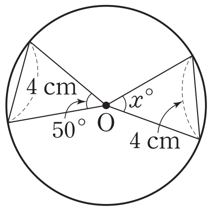
또 길이가 같은 두 현에 대한 중심각의 크기도 같다.

$\angle AOB$는 현 AB에 대한 중심각이다.

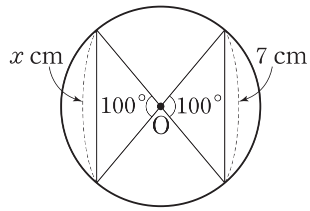


문제 4 **다음 그림에서 x의 값을 구하시오.**

(1)



(2)

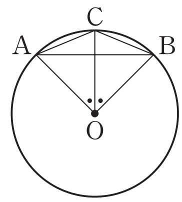


설명하기

다음 두 친구의 대화에서 노을이의 설명을 완성해 보자.

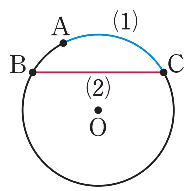
보라: 한 원에서 현의 길이는 중심각의 크기에 정비례해.

노을: 아닌 것 같은데. 내 생각에는 오른쪽 원 O에서



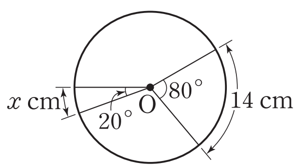
확인하기

1 오른쪽 원 O에서 (1), (2)를 기호로 나타내시오.

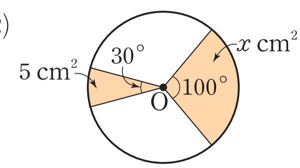


2 다음 그림에서 x의 값을 구하시오.

(1)



(2)



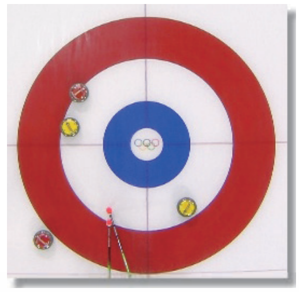
2 부채꼴의 호의 길이와 넓이

부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있다.

원주율 π

생각 톡

컬링은 빙판 위에 둥글고 납작한 돌을 미끄러뜨려서 하우스라고 불리는 표적 안에 넣는 경기이다.
다음은 예은이가 컬링 하우스의 네 원의 둘레의 길이와 지름의 길이를 측정하여 나타낸 것이다.



둘레의 길이(m)	0.942	3.833	7.634	11.529
지름의 길이(m)	0.3	1.22	2.43	3.67
$\frac{(\text{둘레의 길이})}{(\text{지름의 길이})}$	3.14			

탐구 위의 표를 완성하고, $\frac{(\text{둘레의 길이})}{(\text{지름의 길이})}$의 값을 비교해 보자.
(단, 반올림하여 소수점 아래 둘째 자리까지 쓰시오.)

$(\text{원주율})=\frac{(\text{둘레의 길이})}{(\text{지름의 길이})}$

원에서 지름의 길이에 대한 둘레의 길이의 비율, 즉 원주율은 일정하다. 초등학교에서는 주로 3.14를 원주율로 사용하였으나 그 정확한 값은

$$3.14159265358979323846264338327 9\cdots$$

와 같이 소수점 아래의 숫자가 한없이 계속되는 수이다. 이 원주율을 기호로

$$\pi$$

와 같이 나타내고, '파이'라고 읽는다.

원의 둘레의 길이와 넓이는 각각

$$(\text{원의 둘레의 길이})=(\text{지름의 길이})\times(\text{원주율}),$$
$$(\text{원의 넓이})=(\text{반지름의 길이})\times(\text{반지름의 길이})\times(\text{원주율})$$

이므로 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이 l과 넓이 S는 원주율 π를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$l=2r\times\pi=2\pi r$
$S=r\times r\times\pi=\pi r^2$

$$l=2\pi r,\quad S=\pi r^2$$

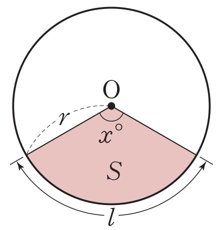
보기 반지름의 길이가 5 cm인 원의 둘레의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면
$l=2\pi\times5=10\pi\ (\text{cm}),\quad S=\pi\times5^2=25\pi\ (\text{cm}^2)$

문제 1 다음 원의 둘레의 길이와 넓이를 구하시오.

(1) 반지름의 길이가 4 cm인 원 (2) 지름의 길이가 6 cm인 원

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r인 원에서 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S는 각각 중심각의 크기에 정비례하므로 다음을 알 수 있다.



$l : 2\pi r = x : 360$에서 $l = 2\pi r \times \dfrac{x}{360}$

$S : \pi r^2 = x : 360$에서 $S = \pi r^2 \times \dfrac{x}{360}$

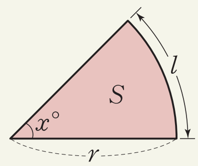
이상을 정리하면 다음과 같다.

부채꼴의 호의 길이와 넓이

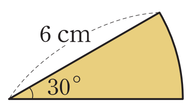
반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$$l = 2\pi r \times \frac{x}{360}$$

$$S = \pi r^2 \times \frac{x}{360}$$



예제 1 반지름의 길이가 6 cm이고 중심각의 크기가 30°인 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하시오.



풀이 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

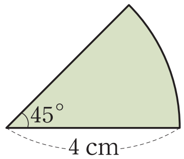
$$l = 2\pi \times 6 \times \frac{30}{360} = \pi\,(\text{cm})$$

$$S = \pi \times 6^2 \times \frac{30}{360} = 3\pi\,(\text{cm}^2)$$

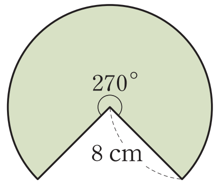
답 호의 길이: π cm, 넓이: 3π cm^2

문제 2 **다음 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하시오.**

(1)



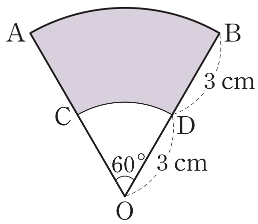
(2)



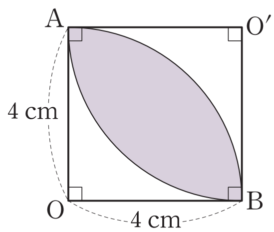
문제 해결

문제 3 **다음 그림은 부채꼴 AOB와 부채꼴 COD, 부채꼴 AOB와 부채꼴 AO′B를 겹쳐 만든 도형이다. 색칠한 부분의 둘레의 길이와 넓이를 구하시오.**

(1)

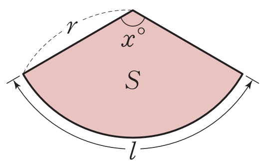


(2)



부채꼴의 넓이는 반지름의 길이와 호의 길이를 이용하여 구할 수도 있다.

반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면



$$l : S = 2\pi r \times \frac{x}{360} : \pi r^2 \times \frac{x}{360}$$
$$= 2 : r$$

이다. 즉 $l : S = 2 : r$에서 $2S = lr$이므로 다음이 성립한다.

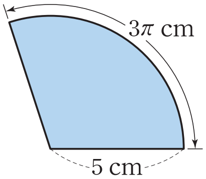
$$S = \frac{1}{2} lr$$

보기 반지름의 길이가 12 cm이고 호의 길이가 6π cm인 부채꼴의 넓이를 S라고 하면

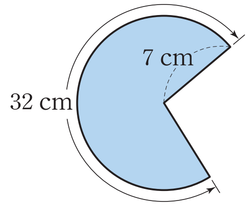
$$S = \frac{1}{2} \times 6\pi \times 12 = 36\pi\ (\text{cm}^2)$$

문제 4 다음 부채꼴의 넓이를 구하시오.

(1)



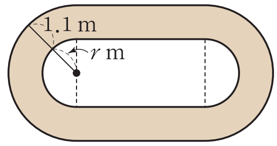
(2)



이야기 수학 · 트랙의 비밀

곡선 부분이 포함된 육상 트랙은 바깥쪽 레인일수록 그 길이가 길어지므로 선수들이 달리는 거리를 같게 맞추기 위해서 레인별로 출발 지점을 조정한다. 그렇다면 그 차이는 어떻게 결정할까?

400 m 육상 트랙에는 두 부분의 곡선 주로가 있고, 이 두 부분을 합치면 하나의 원이 된다. 이 원의 반지름의 길이를 r m라고 하면 레인의 폭이 대략 1.1 m이므로 이웃한 두 레인의 길이의 차는



$$2\pi(r+1.1)-2\pi r=2.2\pi\,(\text{m})$$

가 된다. 따라서 400 m 경기에서는 바깥쪽 레인의 선수가 바로 안쪽 레인의 선수보다 2.2π m, 즉 약 7 m 정도 앞에서 출발한다.

한편 스피드 스케이팅에서는 두 선수의 출발 지점이 같은 대신 각 선수가 안쪽 레인과 바깥쪽 레인을 한 바퀴씩 번갈아 달려서 선수들이 달리는 거리를 같게 맞춘다.

이처럼 스포츠 경기 운영에는 수학적 원리가 포함되어 있다.

확인하기

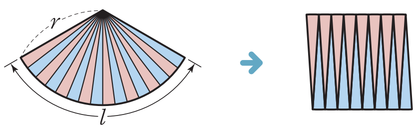
1 다음 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하시오.

(1) 반지름의 길이가 12 cm이고 중심각의 크기가 $120°$인 부채꼴

(2) 반지름의 길이가 4 cm이고 중심각의 크기가 $100°$인 부채꼴

2 반지름의 길이가 9 cm이고 넓이가 63 cm^2인 부채꼴의 호의 길이를 구하시오.

사고력+ 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 r이고 호의 길이가 l인 부채꼴을 중심각의 크기가 같은 부채꼴로 잘게 잘라 서로 엇갈리게 붙이면 직사각형에 가까운 모양이 된다. 이 직사각형의 넓이를 이용하여 부채꼴의 넓이가 $\frac{1}{2}lr$임을 설명하시오.

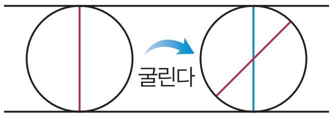


수학 역량 플러스

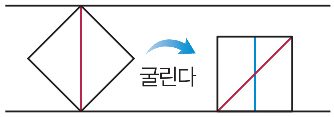
부채꼴로 이루어진 정폭도형

창의·융합 의사소통

맨홀 뚜껑은 대부분 원 모양이다. 원은 어느 방향으로 재어도 그 폭이 항상 같아 어떻게 끼워도 뚜껑이 맨홀 구멍 속으로 빠지지 않기 때문이다. 도형의 폭은 도형과 접하는 두 평행선 사이의 거리로 정하는데, 원과 같이 그 폭이 항상 같은 도형을 정폭도형이라고 한다.

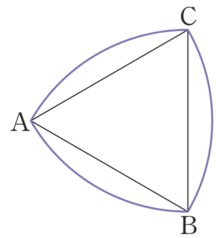


폭이 같은 경우



폭이 다른 경우

독일 기계 공학자 뢸로(Reuleaux, F., 1829~1905)는 오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABC의 각 꼭짓점에서 변의 길이를 반지름으로 하는 세 개의 부채꼴을 그려 정폭도형을 만들었다. 뢸로가 그린 정폭도형을 뢸로삼각형이라고 부르는데 뢸로삼각형은 맨홀 뚜껑, 자전거 바퀴, 기타의 피크 등에 다양하게 활용되고 있다.



활동 1 뢸로삼각형이 정폭도형이 되는 이유를 설명해 보자.

활동 2 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형으로 만든 뢸로삼각형의 둘레의 길이를 구하고, 반지름의 길이가 10 cm인 원의 둘레의 길이와 비교해 보자.

활동 3 우리나라의 동전을 비롯하여 세계 여러 나라의 동전 중에는 정폭도형인 것이 많다. 동전을 정폭도형으로 만들면 좋은 점을 말해 보자.

정답 및 풀이 299쪽

중단원 마무리

Ⅴ-2 원과 부채꼴

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 호와 현, 부채꼴과 활꼴

195쪽

(1) 호: 원 위의 두 점을 양 끝으로 하는 원의 일부분

(2) $\boxed{\quad}$: 원 위의 두 점을 이은 선분

(3) 부채꼴: 원에서 두 반지름과 호로 이루어진 도형

(4) $\boxed{\quad}$: 원에서 현과 호로 이루어진 도형

❷ 부채꼴의 성질

197쪽

(1) 한 원에서 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 같다.

(2) 한 원에서 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 중심각의 크기에 $\boxed{\quad}$한다.

❸ 원의 둘레의 길이와 넓이

199쪽

반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$l=\boxed{\quad}$, $S=\boxed{\quad}$

❹ 부채꼴의 호의 길이와 넓이

200쪽

(1) 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

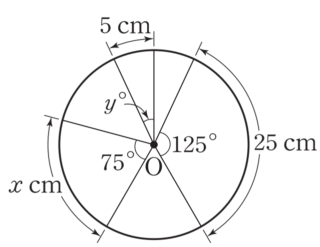
$l=2\pi r\times\boxed{\quad}$, $S=\pi r^2\times\boxed{\quad}$

(2) 반지름의 길이가 r이고 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이를 S라고 하면

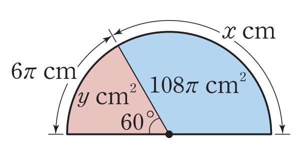
$S=\boxed{\quad}$

표준 문제

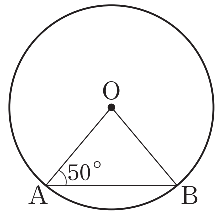
01 오른쪽 원 O에서 x, y의 값을 구하시오.



02 오른쪽 반원에서 x, y의 값을 구하시오.

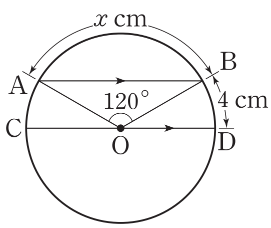


서술형 **03** 오른쪽 원 O에서 $\angle OAB=50^\circ$일 때, 부채꼴 AOB의 넓이와 원 O의 넓이의 비를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

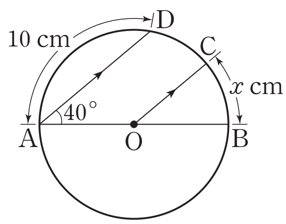


04 다음 원 O에서 x의 값을 구하시오.

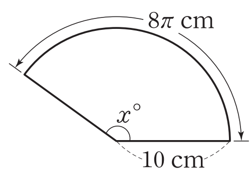
(1)



(2)



05 오른쪽 부채꼴에서 x의 값을 구하시오.

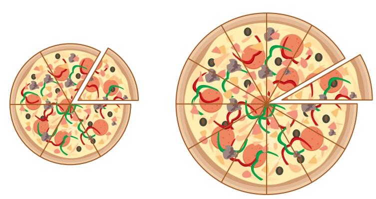


서술형 **06** 중심각의 크기가 30°이고 호의 길이가 3π cm인 부채꼴에서 다음을 구하시오.

(1) 반지름의 길이

(2) 넓이

문제 해결 **07** 어느 피자 가게에서는 오른쪽과 같이 지름의 길이가 각각 20 cm, 30 cm인 원 모양의 피자 A, B를 각각 6등분, 12등분 하여 한 조각씩 판매한다. 두 피자 중에서 한 조각의 양이 더 많은 것을 구하시오. (단, 피자의 두께는 무시한다.)

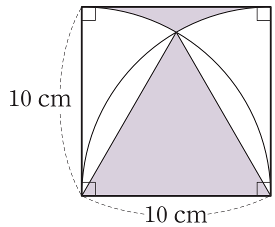


A B

08 오른쪽 그림은 한 변의 길이가 10 cm인 정사각형에서 두 꼭짓점을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 10 cm인 부채꼴을 그린 것이다. 다음을 구하시오.

(1) 색칠한 부분의 둘레의 길이의 합

(2) 색칠한 부분의 넓이의 합

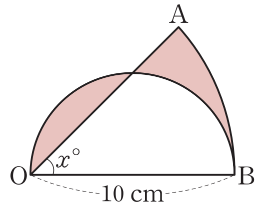


도전 문제

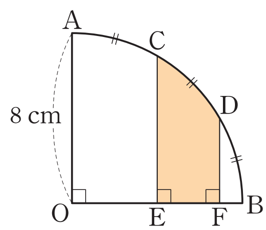
서술형 **09** 오른쪽 그림은 지름의 길이가 10 cm인 반원과 반지름의 길이가 10 cm인 부채꼴 AOB를 겹쳐 놓은 것이다. 색칠한 두 부분의 넓이가 같을 때, 다음을 구하시오.

(1) x의 값

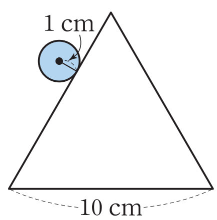
(2) 색칠한 두 부분의 넓이의 합



추론 **10** 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 8 cm이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 AOB가 있다. 호 AB를 삼등분한 점을 C, D라 하고 두 점 C, D에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. 이때 색칠한 부분의 넓이를 구하시오.



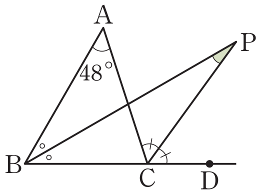
11 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1 cm인 원이 한 변의 길이가 10 cm인 정삼각형의 둘레를 따라 한 바퀴 돌아서 제자리로 왔을 때, 원이 지나간 자리의 넓이를 구하시오.



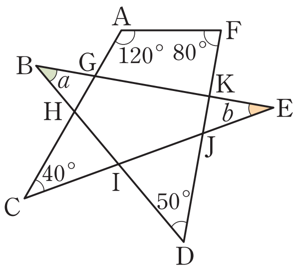
대단원 마무리

정답 및 풀이 300쪽

01 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\angle B$의 이등분선과 $\angle C$의 외각의 이등분선의 교점을 P라고 하자. $\angle A=48°$일 때, $\angle P$의 크기를 구하시오.

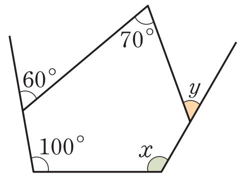


02 오른쪽 그림에서 $\angle a+\angle b$의 크기를 구하시오.



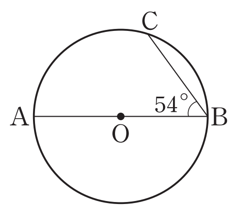
03 내각의 크기의 합이 $1980°$인 다각형의 대각선의 개수를 구하시오.

04 오른쪽 그림에서 $\angle x-\angle y$의 크기를 구하시오.

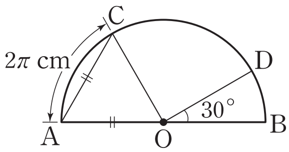


05 한 꼭짓점에서 그을 수 있는 대각선이 12개인 정다각형의 한 외각의 크기를 구하시오.

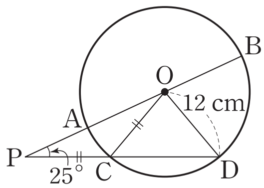
06 오른쪽 원 O에서 지름 AB와 현 BC가 이루는 각의 크기가 $54°$일 때, $\overset{\frown}{AC}$와 $\overset{\frown}{CB}$의 길이의 비를 가장 작은 자연수의 비로 나타내시오.



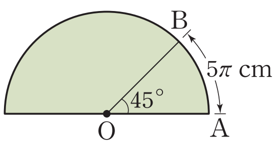
07 오른쪽 반원 O에서 $\overline{AC}=\overline{AO}$, $\angle DOB=30^\circ$이고 $\overset{\frown}{AC}$의 길이가 2π cm일 때, $\overset{\frown}{CD}$의 길이를 구하시오.



08 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 12 cm인 원 O에서 $\overline{CP}=\overline{CO}$, $\angle P=25^\circ$일 때, $\overset{\frown}{BD}$의 길이를 구하시오.

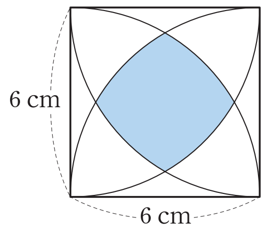


09 오른쪽 반원 O에서 $\angle AOB=45^\circ$이고 $\overset{\frown}{AB}$의 길이가 5π cm일 때, 반원 O의 넓이를 구하시오.

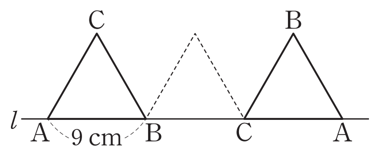


10 호의 길이가 6π cm이고 반지름의 길이가 4 cm인 부채꼴의 넓이를 구하시오.

11 오른쪽 그림은 한 변의 길이가 6 cm인 정사각형에서 각 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6 cm인 부채꼴을 그린 것이다. 색칠한 부분의 둘레의 길이를 구하시오.



12 한 변의 길이가 9 cm인 정삼각형 ABC의 변 AB가 직선 l 위에 놓여 있다. 삼각형 ABC를 시곗바늘이 도는 방향으로 다음 그림과 같이 회전시켰을 때, 점 A가 움직인 거리를 구하시오.



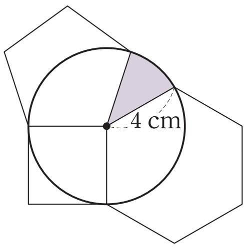
서술형

13 한 외각의 크기가 한 내각의 크기보다 $36°$만큼 작은 정다각형의 내각의 크기의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

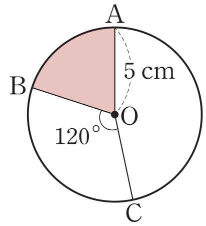
14 한 변의 길이가 모두 4 cm인 정사각형, 정오각형, 정육각형의 한 꼭짓점이 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 4 cm인 원의 중심과 일치할 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, 다각형을 겹쳐 놓지 않는다.)



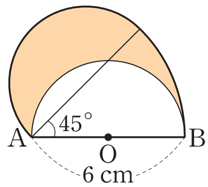
풀이

15 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 5 cm인 원 O에서 $\angle BOC=120°$이고 $\overset{\frown}{AB}$와 $\overset{\frown}{AC}$의 길이의 비가 $3:7$일 때, 부채꼴 AOB의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

16 오른쪽 그림은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 O와 반원 O를 점 A를 중심으로 $45°$만큼 회전시킬 때 반원이 지나간 자리를 나타낸 것이다. 반원 O의 지름의 길이가 6 cm일 때, 색칠한 부분의 둘레의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
① 다각형의 대각선의 개수를 구할 수 있다.			
② 다각형의 내각의 크기의 합과 외각의 크기의 합을 구할 수 있다.			
③ 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이, 넓이의 관계를 이해한다.			
④ 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

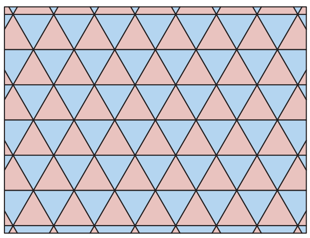
창의·융합 프로젝트 6

테셀레이션으로 책갈피 만들기

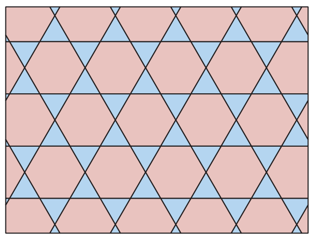
건물의 바닥이나 벽, 보도블록 등을 보면 똑같은 모양의 타일이나 블록이 빈틈없이 서로 겹치지 않게 규칙적으로 붙어 있는 것을 볼 수 있다. 이와 같이 똑같은 모양을 이용해서 빈틈 없이 겹치지 않게 평면을 완전히 덮는 것을 테셀레이션(tessellation)이라고 한다.

테셀레이션은 옷, 가구, 미술 작품, 건축물 등에 다양하게 응용되고 있으며 조각보나 우리나라의 전통 문양에서도 찾아볼 수 있다.

과제 1 [그림 1]은 한 가지 정다각형을 이용한 테셀레이션이고, [그림 2]는 두 가지 정다각형을 이용한 테셀레이션이다. 이와 같이 테셀레이션을 만들 수 있는 이유를 다각형의 내각의 크기와 관련하여 말해 보자.

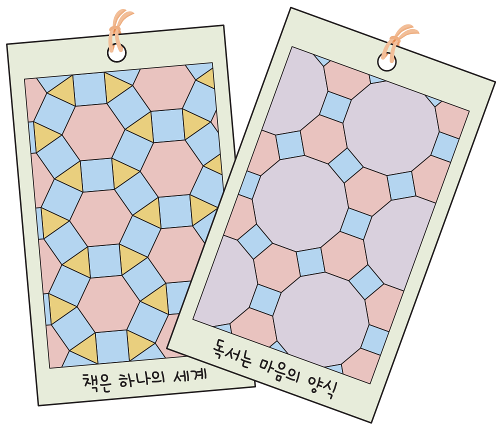


[그림 1]



[그림 2]

과제 2 여러 가지 정다각형을 이용한 테셀레이션으로 책갈피를 만들어 보자.



세상 속 수학

Math History

원주율 π 이야기

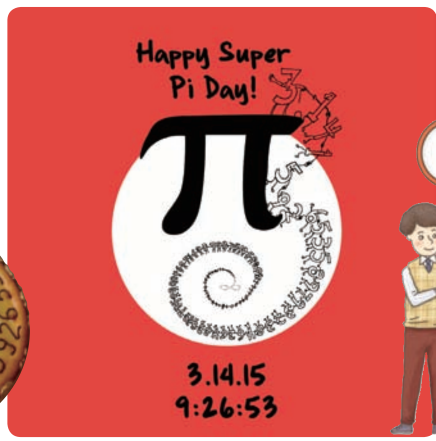
원은 그 크기에 상관없이 원의 지름의 길이에 대한 둘레의 길이의 비율, 즉 원주율이 항상 같다. 모든 원에서 원주율이 항상 같기 때문에 직접 측정하지 않고도 원주율을 이용하여 원의 둘레의 길이나 넓이를 구할 수 있다.

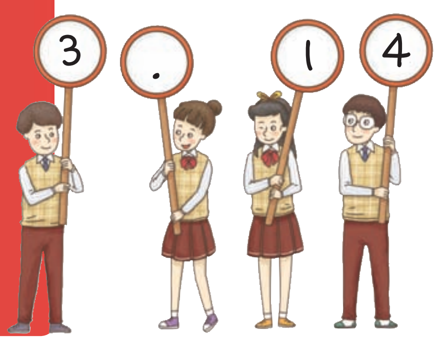
고대에는 원주율을 대체로 3이라고 생각했는데, 기원전 3세기에 그리스 수학자 아르키메데스(Archimedes, B.C. 287?~B.C. 212)는 원의 둘레의 길이가 원의 안쪽에 접하는 정96각형의 둘레의 길이보다 크고 원의 바깥쪽에 접하는 정96각형의 둘레의 길이보다 작다는 것을 이용하여 원주율을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하였다. 또 16세기 수학자 쾰런(Ceulen, L., 1540~1610)은 정 2^{62}각형으로부터 원주율을 소수점 아래 35번째 자리까지 구하였다.

18세기에는 스위스 수학자 오일러(Euler, L., 1707~1783)가 원주율을 π로 나타내었고, 독일 수학자 람베르트(Lambert, J. H., 1728~1777)는 π의 소수점 아래 숫자가 규칙이 없이 무한히 계속된다는 것을 보였다.

원주율 π의 계산에 컴퓨터가 도입되면서 π의 값을 소수점 아래 몇 조번째 자리까지 구할 수 있게 되었고, π의 값을 소수점 아래 몇 번째 자리까지 구할 수 있느냐는 것이 컴퓨터의 성능을 측정하는 방법으로 이용되기도 하였다.

한편 세계 곳곳에서는 원주율 π를 기념하기 위해서 3월 14일을 파이(π) 데이로 지정하여 파이를 만들어 먹거나 수학 강연을 여는 등 다채로운 기념 행사를 실시하고 있다.





진로 탐색

행사 기획자 | 기업의 이미지를 높이거나 지역의 진흥을 위한 다양한 행사를 기획하고 실행한다.

(출처: 데이비드 애치슨, 『수학 세상 가볍게 읽기』)

VI 입체도형

배운 내용 — **이 단원의 내용** — **배울 내용**

초 5~6
- 직육면체와 정육면체
- 각기둥과 각뿔
- 원기둥, 원뿔, 구
- 입체도형의 겉넓이와 부피

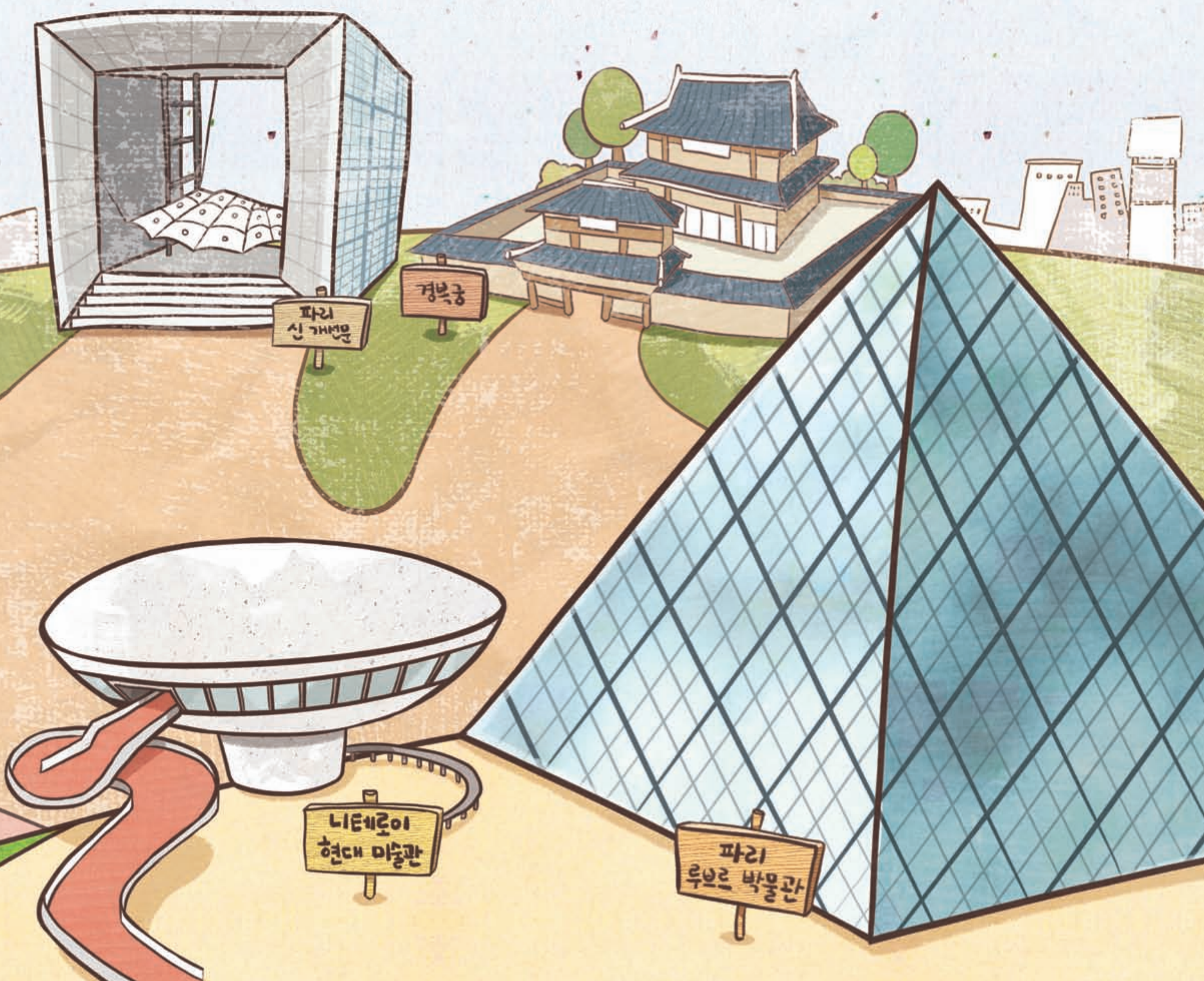
1 다면체와 회전체
- 다면체
- 회전체

2 입체도형의 겉넓이와 부피
- 기둥의 겉넓이와 부피
- 뿔의 겉넓이와 부피
- 구의 겉넓이와 부피

중 2
- 도형의 닮음
- 피타고라스 정리

중 3
- 삼각비

세계 곳곳에는 **각기둥, 원기둥, 각뿔, 원뿔, 구** 등을 이용하여 만든 아름다운 건축물들이 많이 있다.
이 단원에서는 다면체와 회전체를 알아본다.



1 다면체와 회전체

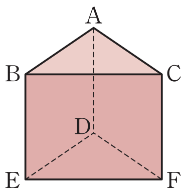
준비 학습

각기둥

1 오른쪽 각기둥에 대하여 다음에 답하시오.

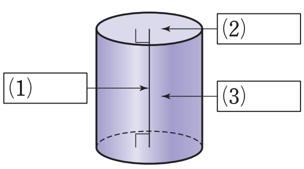
(1) 각기둥의 이름을 말하시오.

(2) 높이를 잴 수 있는 모서리를 모두 찾으시오.



원기둥

2 오른쪽 원기둥에서 각 부분의 이름을 쓰시오.



1 다면체

다면체의 성질을 이해한다.

다면체

생각톡

우리 주변에는 여러 가지 입체도형 모양의 물건이 있다.

(ㄱ)

(ㄴ)

(ㄷ)

(ㄹ)

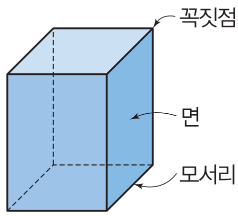
(ㅁ)

(ㅂ)

탐구 위의 물건들 중에서 다각형 모양의 면으로만 둘러싸인 것을 찾아보자.

각기둥은 두 밑면이 서로 평행하며 그 모양이 합동인 다각형이고 옆면의 모양이 모두 직사각형인 다면체이다. 또 각뿔은 밑면의 모양이 다각형이고 옆면의 모양이 모두 삼각형인 다면체이다.

사각기둥과 같이 다각형 모양의 면으로만 둘러싸인 입체도형을 **다면체**라고 한다.

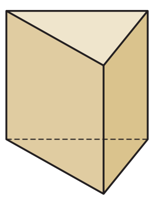


이때 다면체를 둘러싸고 있는 다각형 모양의 면을 다면체의 면, 다각형의 변을 다면체의 모서리, 다각형의 꼭짓점을 다면체의 꼭짓점이라고 한다.

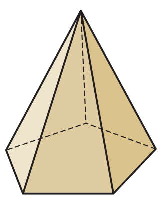
다면체는 그 면의 개수에 따라 사면체, 오면체, 육면체, …라고 한다. 예를 들어 사각기둥은 육면체이고, 삼각뿔은 사면체이다.

문제 1 다음 다면체는 몇 면체인지 말하시오.

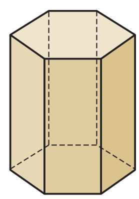
(1)



(2)



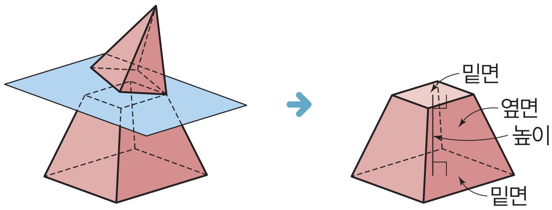
(3)



각기둥, 각뿔, 각뿔대는 다면체를 모양에 따라 분류한 것이고, 사면체, 오면체, 육면체, …는 다면체를 면의 개수에 따라 분류한 것이다.

각뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 각뿔이 아닌 것을 **각뿔대**라고 한다. 각뿔대에서 평행한 두 면을 밑면, 두 밑면 사이의 거리를 높이라 하고 밑면이 아닌 면을 옆면이라고 한다. 이때 각뿔대의 옆면의 모양은 모두 사다리꼴이다.

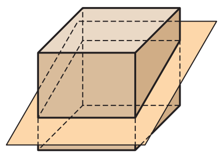
각뿔대는 밑면의 모양에 따라 삼각뿔대, 사각뿔대, 오각뿔대, …라고 한다.



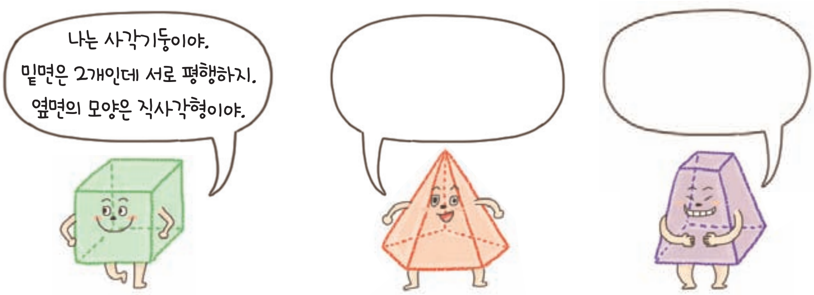
문제 2 다음 표를 완성하시오.

	육각기둥	육각뿔	육각뿔대
면의 개수			
모서리의 개수			
꼭짓점의 개수			
옆면의 모양			

추론
문제 3 입체도형을 평면으로 자를 때, 잘린 면을 단면이라고 한다. 정육면체를 자른 단면의 모양이 될 수 있는 다각형을 말하시오.



표현하기 다음과 같이 세 육면체가 자기소개를 하고 있다. 나머지 입체도형을 소개해 보자.

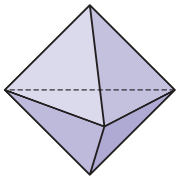


정다면체

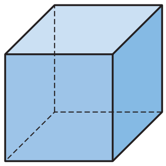
생각톡

다음 입체도형은 모든 면의 모양이 정다각형인 다면체이다.

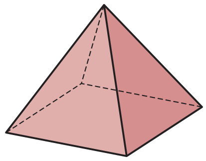
(ㄱ)



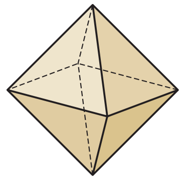
(ㄴ)



(ㄷ)



(ㄹ)



탐구 ① 모든 면이 서로 합동인 다면체를 말해 보자.

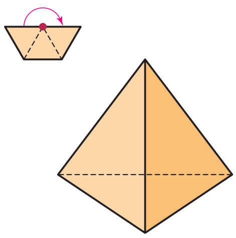
탐구 ② 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 모두 같은 다면체를 말해 보자.

다면체 중에서 각 면의 모양이 모두 합동인 정다각형이고 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같은 다면체를 **정다면체**라고 한다.

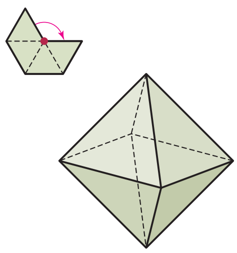
정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 가지뿐이다.

정다면체를 면의 모양에 따라 분류하면 다음과 같다.

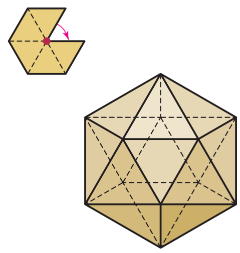
1 정삼각형



정사면체

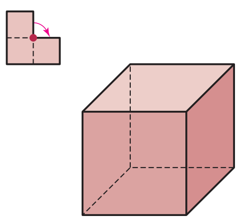


정팔면체



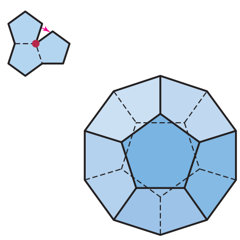
정이십면체

2 정사각형



정육면체

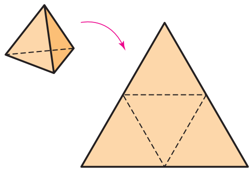
3 정오각형

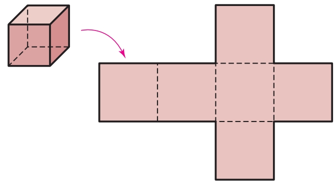


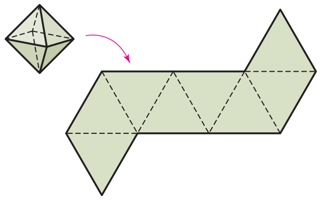
정십이면체

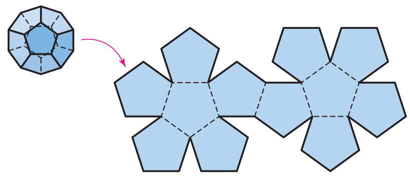
정다면체의 전개도는 이웃한 면의 위치에 따라 여러 가지 방법으로 그릴 수 있다.

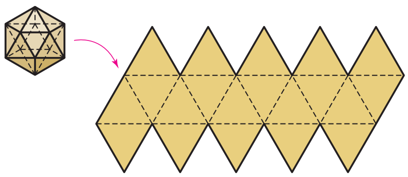
정다면체의 전개도는 다음과 같이 그릴 수 있다.











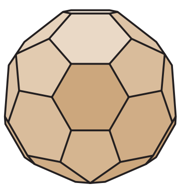
문제 4 다음 표를 완성하시오.

	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
면의 모양					
한 꼭짓점에 모인 면의 개수					

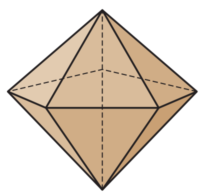
추론

문제 5 다음 두 입체도형은 모든 면의 모양이 정다각형인 다면체이지만 정다면체가 아니다. 그 이유를 설명하시오.

(1)

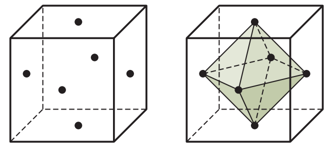


(2)



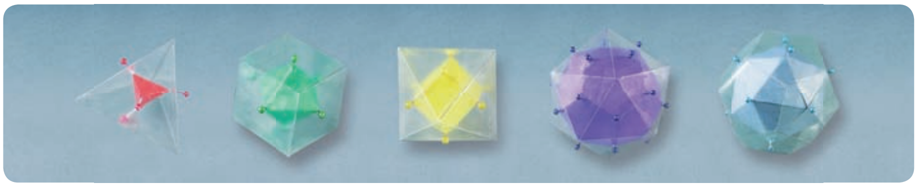
이야기 수학

쌍을 이루는 정다면체



정다면체의 각 면의 한가운데 점을 연결하면 또 하나의 정다면체를 만들 수 있다. 예를 들어 정육면체와 정팔면체의 각 면의 한가운데 점을 연결하면 각각 정팔면체와 정육면체를 만들 수 있다. 즉 정육면체의 내부에는 정팔면체가, 정팔면체의 내부에는 정육면체가 만들어진다. 이와 같이 정다면체가 쌍을 이루는 것을 정다면체의 쌍대라고 하는데, 정사면체와 정사면체, 정십이면체와 정이십면체도 서로 쌍대를 이룬다.

따라서 쌍대를 이루는 정다면체는 바깥쪽 다면체의 면의 개수와 안쪽 다면체의 꼭짓점의 개수가 같다. 예를 들어 정육면체의 면의 개수와 정팔면체의 꼭짓점의 개수가 같고, 정팔면체의 면의 개수와 정육면체의 꼭짓점의 개수가 같다.



확인하기

1 다음 입체도형은 몇 면체인지 말하시오.

(1) 칠각기둥　　(2) 사각뿔

(3) 팔각뿔대　　(4) 십이각기둥

2 다음 조건에 알맞은 입체도형을 보기에서 모두 고르시오.

보기

(ㄱ) 사각뿔대　　(ㄴ) 오각뿔　　(ㄷ) 정사면체

(ㄹ) 정팔면체　　(ㅁ) 정십이면체

(1) 옆면의 모양이 사다리꼴인 다면체

(2) 삼각형 모양인 면을 포함하는 다면체

(3) 모든 면의 모양이 정오각형인 다면체

수학 역량 플러스

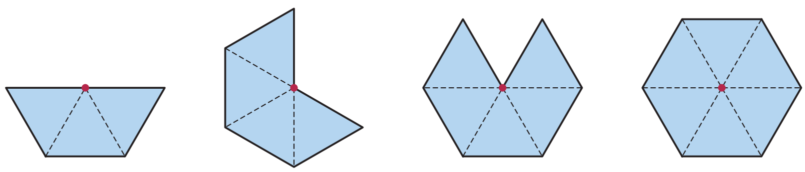
정다면체는 왜 다섯 가지일까

의사소통 추론

고대 그리스 수학자이자 철학자인 플라톤(Platon, B.C. 427?~B.C. 347?)은 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정이십면체, 정십이면체가 각각 불, 흙, 공기, 물, 우주 전체를 상징한다고 생각했다.

예로부터 정다면체는 다섯 가지만 존재한다고 알려져 있다. 다음을 통해 그 이유를 알아보자.

활동 1 한 꼭짓점에 정삼각형이 각각 3개, 4개, 5개씩 모인 정다면체는 만들 수 있고, 한 꼭짓점에 정삼각형이 6개씩 모인 정다면체는 만들 수 없는 이유를 설명해 보자.



활동 2 한 꼭짓점에 정사각형이 3개씩 모인 정다면체는 만들 수 있고, 4개씩 모인 정다면체는 만들 수 없는 이유를 설명해 보자.

활동 3 한 꼭짓점에 정오각형이 3개씩 모인 정다면체는 만들 수 있고, 4개씩 모인 정다면체는 만들 수 없는 이유를 설명해 보자.

활동 4 면의 모양이 정육각형인 정다면체를 만들 수 없는 이유를 설명해 보자.

2 회전체

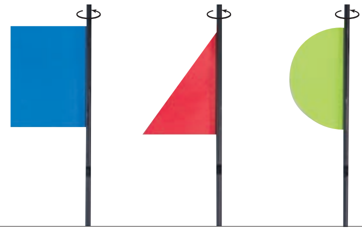
회전체의 성질을 이해한다.

회전체

생각톡

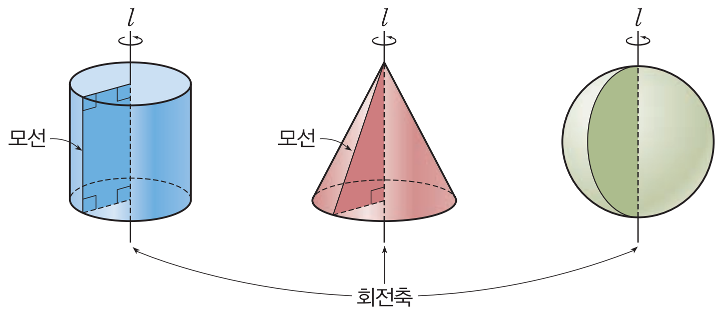
오른쪽과 같이 직사각형, 직각삼각형, 반원 모양의 종이를 빨대에 붙인 후 빨대를 축으로 하여 회전시키려고 한다.

탐구 각 도형을 회전시킬 때, 어떤 입체도형이 생기는지 말해 보자.

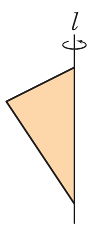


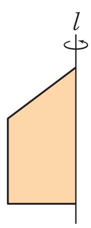
평면도형을 한 직선을 축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형을 **회전체**라 하고, 이때 축으로 사용한 직선을 **회전축**이라고 한다.

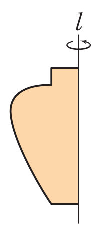
다음 그림과 같이 직사각형, 직각삼각형, 반원을 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체는 각각 원기둥, 원뿔, 구이다.



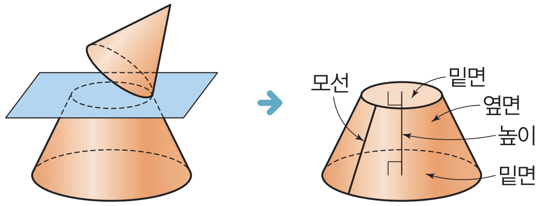
문제 1 **다음 그림과 같은 평면도형을 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체를 그리시오.**

(1) 

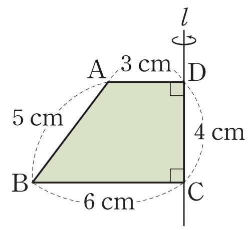
(2) 

(3) 

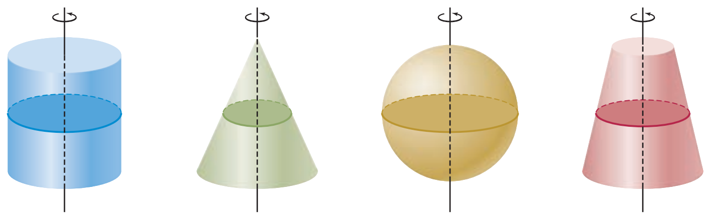
원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 원뿔이 아닌 것을 **원뿔대**라고 한다. 원뿔대에서 평행한 두 면을 밑면, 두 밑면 사이의 거리를 높이라 하고 밑면이 아닌 면을 옆면이라고 한다.



문제 2 **오른쪽 사다리꼴 ABCD를 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체를 그리고, 회전체의 높이를 말하시오.**



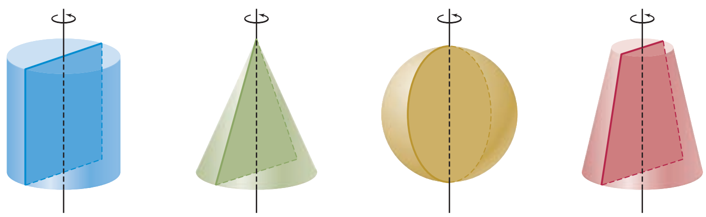
원기둥, 원뿔, 구, 원뿔대를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 다음과 같이 모두 원이다.



또 원기둥, 원뿔, 구, 원뿔대를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면은 각각 직사각형, 이등변삼각형, 원, 사다리꼴이다.

일반적으로 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면은 모두 합동이고 회전축을 대칭축으로 하는 선대칭도형이다.

한 직선을 따라 접어서 완전히 겹쳐지는 도형을 선대칭도형이라고 한다.



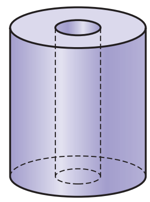
일반적으로 회전체는 다음과 같은 성질을 갖는다.

회전체의 성질

❶ 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면에는 항상 원이 나타난다.

❷ 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면은 모두 합동이고 회전축을 대칭축으로 하는 선대칭도형이다.

문제 3 **오른쪽 그림은 평면도형을 회전시킨 회전체이다. 다음에 답하시오.**



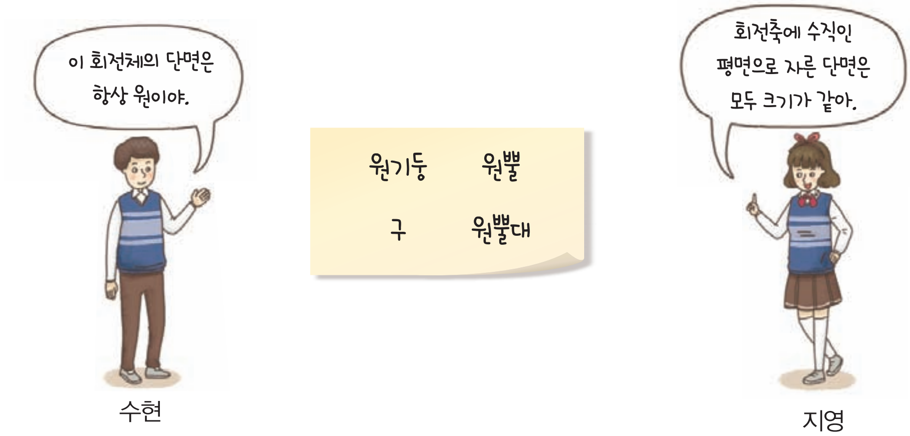
(1) 회전시킨 평면도형과 회전축을 그리시오.

(2) 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자른 단면을 그리시오.

(3) 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자른 단면을 그리시오.

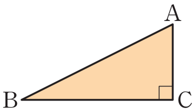
추론

문제 4 **수현이와 지영이가 설명하는 회전체를 다음에서 각각 고르시오.**



확인하기

1 오른쪽 직각삼각형 ABC를 다음 직선을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체를 그리시오.



(1) $\overleftrightarrow{AB}$ (2) $\overleftrightarrow{BC}$ (3) $\overleftrightarrow{AC}$

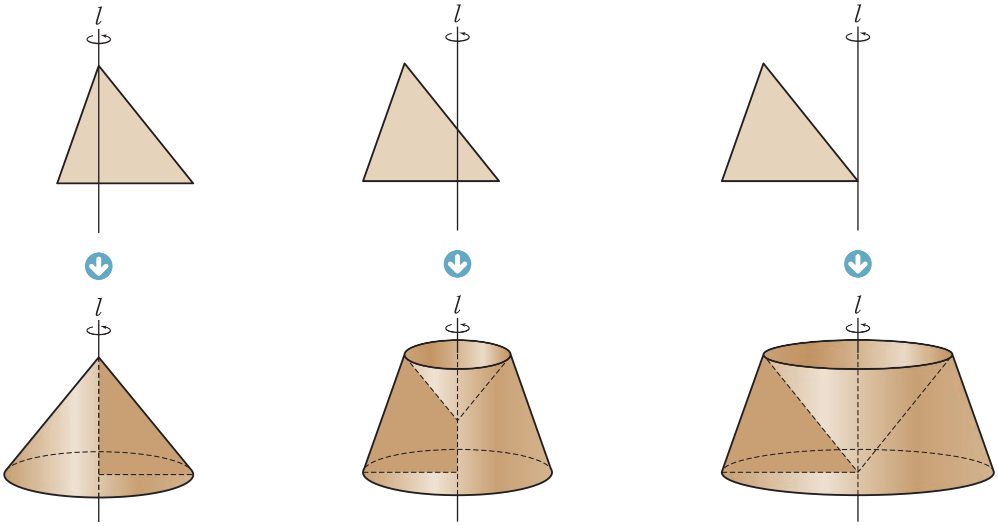
사고력+ 구를 평면으로 자를 때, 단면의 넓이가 최대가 되도록 자르는 방법을 말하시오.

수학 역량 플러스

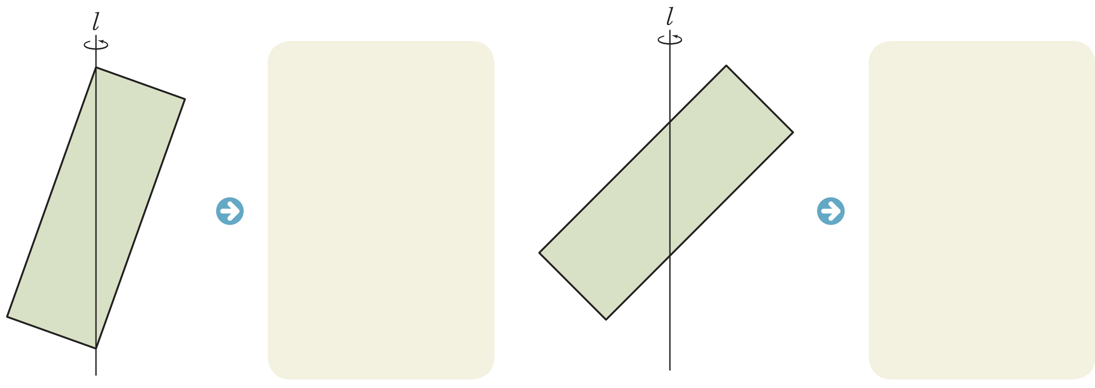
회전체의 모양 탐구하기

창의·융합 추론

같은 평면도형이라도 회전축의 위치를 다르게 하여 회전시키면 서로 다른 모양의 회전체를 만들 수 있다.



활동 1 다음과 같이 직사각형을 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체를 그려 보자.



활동 2 주변에서 평면도형을 찾아 회전축을 정하고 1회전 시킬 때 생기는 회전체를 그려 보자.

정답 및 풀이 303쪽

중단원 마무리

Ⅵ-1 다면체와 회전체

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

❶ 다면체

215쪽

(1) 다면체: 다각형 모양의 면으로만 둘러싸인 입체도형

(2) $\boxed{\quad}$: 각뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 각뿔이 아닌 것

❷ 정다면체

217쪽

(1) 정다면체: 각 면의 모양이 모두 합동인 $\boxed{\quad}$이고 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같은 다면체

(2) 정다면체의 종류: 정사면체, 정육면체, $\boxed{\quad}$, 정십이면체, 정이십면체

❸ 회전체

221쪽

(1) $\boxed{\quad}$: 평면도형을 한 직선을 축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형

(2) $\boxed{\quad}$: 원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 원뿔이 아닌 것

(3) 회전체의 성질

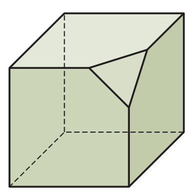
① 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면에는 항상 $\boxed{\quad}$이 나타난다.

② 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면은 모두 합동이고 회전축을 대칭축으로 하는 $\boxed{\quad}$도형이다.

표준 문제

01 서술형

오른쪽 입체도형의 면의 개수를 a, 꼭짓점의 개수를 b, 모서리의 개수를 c라고 할 때, $a-b+c$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



02 다음 조건을 모두 만족시키는 입체도형을 말하시오.

(가) 구면체이다.
(나) 옆면의 모양은 직사각형이다.
(다) 두 밑면은 합동인 다각형이고 서로 평행하다.

서술형 **03** 십면체인 각기둥, 각뿔, 각뿔대의 밑면의 모양을 각각 말하시오.

문제 해결 **04** 다음 조건을 모두 만족시키는 정다면체의 모서리의 개수를 구하시오.

> (가) 각 면의 모양은 모두 합동인 정삼각형이다.
> (나) 한 꼭짓점에 모인 면의 개수는 3이다.

05 다음 중에서 정다면체에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 정다면체는 모든 모서리의 길이가 같다.
② 정다면체는 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 모두 같다.
③ 정다면체의 면의 모양은 정삼각형, 정사각형, 정오각형뿐이다.
④ 각 면의 모양이 정오각형인 정다면체는 정이십면체뿐이다.
⑤ 한 꼭짓점에 모인 면의 개수가 6인 정다면체는 없다.

06 다음 조건에 알맞은 입체도형을 보기에서 모두 고르시오.

보기

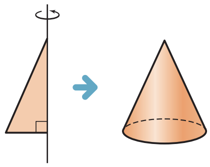
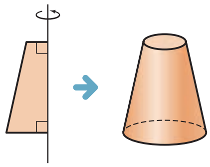
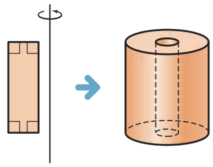
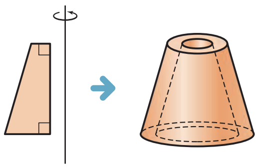
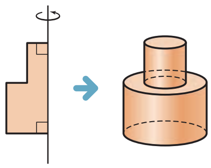
(ㄱ) 삼각기둥	(ㄴ) 삼각뿔	(ㄷ) 정팔면체
(ㄹ) 원기둥	(ㅁ) 정십이면체	(ㅂ) 구
(ㅅ) 사각뿔대	(ㅇ) 원뿔대	(ㅈ) 오각뿔

(1) 회전체
(2) 모든 면의 모양이 삼각형인 다면체
(3) 옆면의 모양이 직사각형이 아닌 사다리꼴인 다면체

07 다음 중에서 회전체와 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 연결한 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 원뿔 – 이등변삼각형　　② 원뿔대 – 평행사변형
③ 원기둥 – 직사각형　　④ 구 – 원
⑤ 반구 – 반원

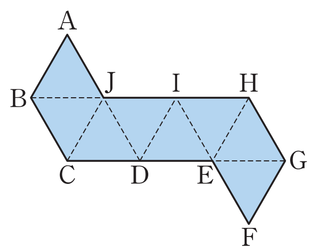
08 다음 중에서 평면도형을 회전시켜 만든 입체도형으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

①

②

③

④

⑤


도전 문제

서술형 **09** 모서리와 면의 개수의 차가 24인 각뿔대의 꼭짓점의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

추론 **10** 오른쪽 그림과 같은 전개도를 접어 만든 정다면체에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (정답 2개)



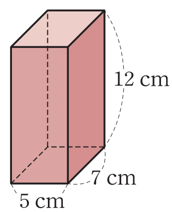
① 한 꼭짓점에 모인 면의 개수는 4이다.
② 한 꼭짓점에 모인 모서리의 개수는 4이다.
③ 정사면체 두 개를 붙여 만들 수 있다.
④ 모서리 AJ와 모서리 FG는 겹쳐진다.
⑤ 직선 AB와 직선 DE는 꼬인 위치에 있다.

2 입체도형의 겉넓이와 부피

준비 학습

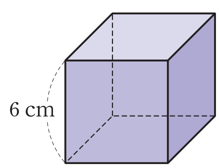
직육면체의 겉넓이와 부피

❶ 오른쪽 직육면체의 겉넓이와 부피를 구하시오.



정육면체의 겉넓이와 부피

❷ 오른쪽 정육면체의 겉넓이와 부피를 구하시오.



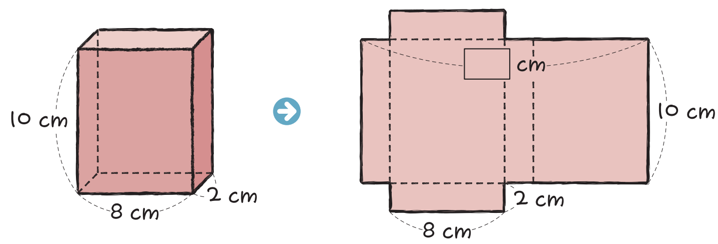
1 기둥의 겉넓이와 부피

기둥의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.

기둥의 겉넓이

생각 톡

다음은 사각기둥 모양의 상자를 펼쳐 놓은 것이다.



탐구 ① 위의 그림에서 □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

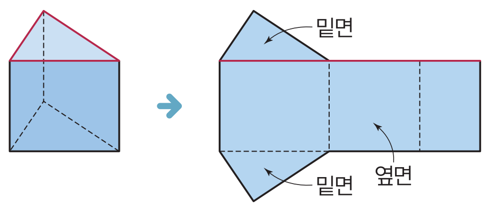
탐구 ② 상자의 밑면의 둘레의 길이를 구하고 **탐구 ①**과 비교해 보자.

기둥의 겉넓이는 전개도를 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

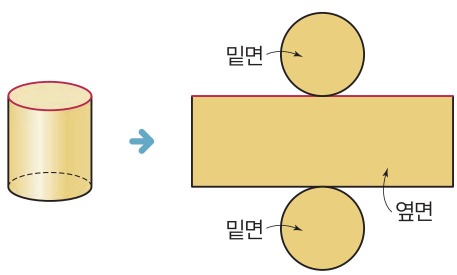
각기둥의 전개도는 다음 그림과 같이 서로 합동인 두 개의 밑면과 직사각형 모양의 옆면으로 이루어져 있으므로 각기둥의 겉넓이는 두 밑넓이와 옆넓이의 합으로 구할 수 있다.

입체도형에서 한 밑면의 넓이를 밑넓이, 옆면 전체의 넓이를 옆넓이라고 한다.

기둥의 전개도에서 옆면을 이루는 직사각형의 가로의 길이는 밑면의 둘레의 길이와 같다.



또 원기둥의 전개도는 다음 그림과 같이 서로 합동인 두 개의 밑면과 직사각형 모양의 옆면으로 이루어져 있으므로 원기둥의 겉넓이도 두 밑넓이와 옆넓이의 합으로 구할 수 있다.



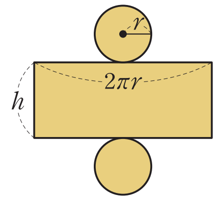
이상을 정리하면 다음과 같다.

기둥의 겉넓이

(기둥의 겉넓이)$=$(밑넓이)$\times 2+$(옆넓이)

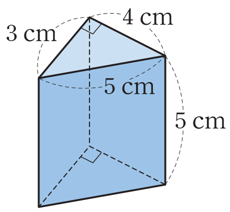
참고 밑면인 원의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\begin{aligned}(\text{원기둥의 겉넓이})&=(\text{밑넓이})\times 2+(\text{옆넓이})\\&=\pi r^2\times 2+2\pi r\times h\\&=2\pi r^2+2\pi rh\end{aligned}$$

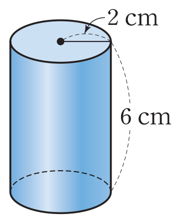


예제 1 다음 기둥의 겉넓이를 구하시오.

(1)



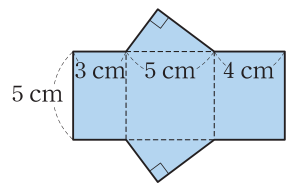
(2)



풀이 (1) (밑넓이)$=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6\,(\text{cm}^2)$,

(옆넓이)$=(3+5+4)\times 5=60\,(\text{cm}^2)$이므로

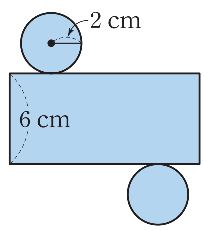
$$\begin{aligned}(\text{겉넓이})&=(\text{밑넓이})\times 2+(\text{옆넓이})\\&=6\times 2+60\\&=72\,(\text{cm}^2)\end{aligned}$$



(2) (밑넓이)$=\pi\times 2^2=4\pi\,(\text{cm}^2)$,

(옆넓이)$=(2\pi\times 2)\times 6=24\pi\,(\text{cm}^2)$이므로

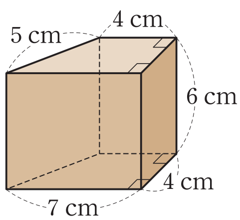
$$\begin{aligned}(\text{겉넓이})&=(\text{밑넓이})\times 2+(\text{옆넓이})\\&=4\pi\times 2+24\pi\\&=32\pi\,(\text{cm}^2)\end{aligned}$$



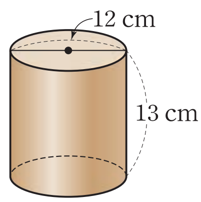
답 (1) 72 cm^2 (2) $32\pi\text{ cm}^2$

문제 1 다음 기둥의 겉넓이를 구하시오.

(1)

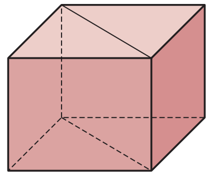


(2)



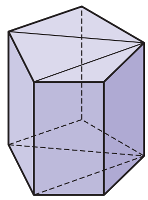
기둥의 부피

직육면체의 부피를 이용하여 기둥의 부피를 구해 보자.



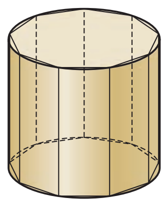
오른쪽 그림과 같이 직육면체는 모양과 크기가 같은 두 개의 삼각기둥으로 나눌 수 있으므로 삼각기둥의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}(\text{삼각기둥의 부피}) &= \frac{1}{2}\times(\text{직육면체의 부피})\\ &= \frac{1}{2}\times(\text{직육면체의 밑넓이})\times(\text{높이})\\ &= (\text{삼각기둥의 밑넓이})\times(\text{높이})\end{aligned}$$



일반적으로 각기둥은 여러 개의 삼각기둥으로 나눌 수 있으므로 각기둥의 부피는 각각의 삼각기둥의 부피의 합으로 구할 수 있다. 이때 나누어진 삼각기둥의 밑넓이의 합은 주어진 각기둥의 밑넓이와 같으므로 각기둥의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\text{각기둥의 부피}) = (\text{밑넓이})\times(\text{높이})$$

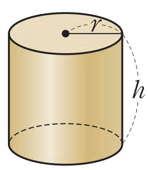


한편 오른쪽 그림과 같이 원기둥 안에 밑면이 정다각형인 각기둥을 밑면의 변의 개수를 계속 늘려 가며 만들면 각기둥은 점점 원기둥에 가까워진다. 따라서 원기둥의 부피도 각기둥의 부피와 같은 방법으로 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

기둥의 부피

$(\text{기둥의 부피}) = (\text{밑넓이})\times(\text{높이})$

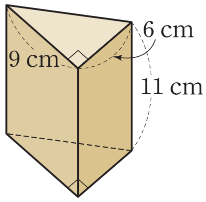


참고 밑면인 원의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥에서

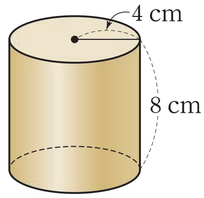
$$\begin{aligned}(\text{원기둥의 부피}) &= (\text{밑넓이})\times(\text{높이})\\ &= \pi r^2\times h = \pi r^2 h\end{aligned}$$

예제 2 다음 기둥의 부피를 구하시오.

(1)



(2)



풀이 (1) (밑넓이)$=\frac{1}{2}\times9\times6=27\,(\text{cm}^2)$이므로

(부피)=(밑넓이)×(높이)

$=27\times11=297\,(\text{cm}^3)$

(2) (밑넓이)$=\pi\times4^2=16\pi\,(\text{cm}^2)$이므로

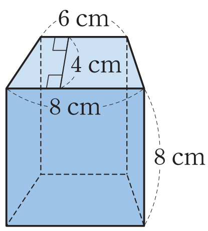
(부피)=(밑넓이)×(높이)

$=16\pi\times8=128\pi\,(\text{cm}^3)$

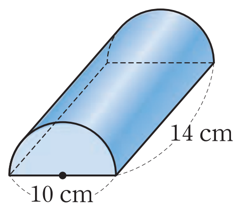
답 (1) 297 cm^3 (2) $128\pi\text{ cm}^3$

문제 2 다음 기둥의 부피를 구하시오.

(1)



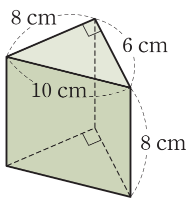
(2)



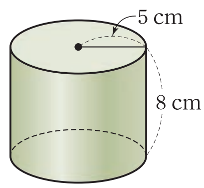
확인하기

1 다음 기둥의 겉넓이와 부피를 구하시오.

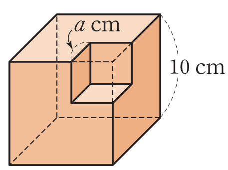
(1)



(2)



사고력+ 오른쪽 그림은 한 모서리의 길이가 10 cm인 정육면체에서 한 모서리의 길이가 a cm인 정육면체를 잘라 낸 입체도형이다. 이 입체도형의 겉넓이를 구하시오.



수학 역량 플러스

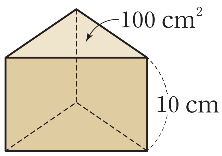
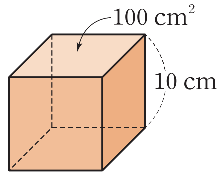
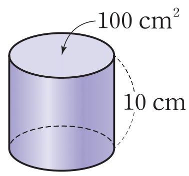
음료수 캔이 원기둥 모양인 이유

문제 해결 창의·융합

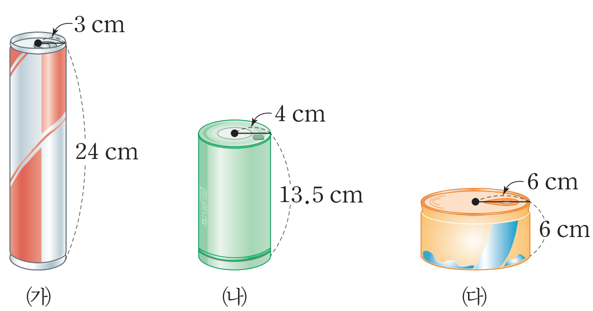
우리 주변에서 흔히 볼 수 있는 음료수 캔은 대부분 원기둥 모양이다. 만약 음료수 캔이 각기둥 모양이면 캔을 잡았을 때 모서리의 뾰족한 부분에 다칠 수도 있고, 운반 중 작은 충격으로도 캔이 파손될 위험이 있다.

뿐만 아니라 캔을 만드는 재료비를 최소로 하기 위해서도 원기둥 모양이 적합하다.

활동 1 다음은 넓이가 100 cm^2인 정삼각형, 정사각형, 원을 밑면으로 하고 높이가 10 cm인 기둥에 대한 표이다. 세 기둥의 부피와 겉넓이를 비교하여 음료수 캔이 원기둥 모양인 이유를 경제적인 측면에서 설명해 보자.

밑면의 모양	정삼각형	정사각형	원
입체도형			
밑면의 둘레의 길이	약 45.6 cm	40 cm	약 35.4 cm

활동 2 다음 그림의 (가), (나), (다)는 부피가 같은 원기둥 모양의 캔이다. 같은 재료를 사용하여 캔을 만든다고 할 때, (가), (나), (다) 중에서 어느 것이 재료비가 가장 적게 드는지 말해 보자.



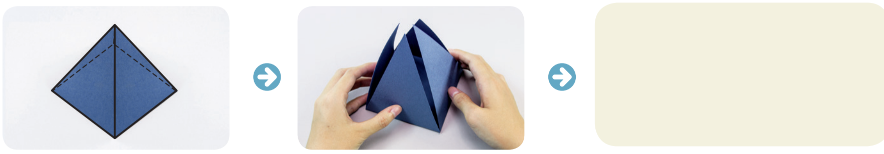
2 뿔의 겉넓이와 부피

뿔의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.

뿔의 겉넓이

생각 톡

다음은 사각뿔 모양의 상자를 펼치는 과정이다.

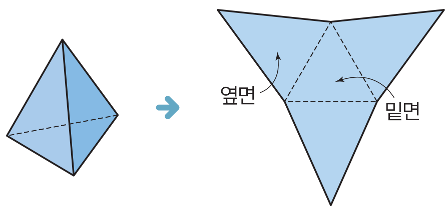


탐구 ① 상자를 펼친 그림을 그려 보자.

탐구 ② 펼친 그림에서 밑면과 옆면의 모양은 각각 어떤 다각형인지 말해 보자.

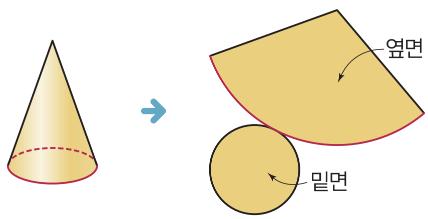
기둥과 마찬가지로 뿔의 겉넓이도 전개도를 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

각뿔의 전개도는 다음 그림과 같이 한 개의 밑면과 여러 개의 삼각형 모양의 옆면으로 이루어져 있으므로 각뿔의 겉넓이는 밑넓이와 옆넓이의 합으로 구할 수 있다.



원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같다.

또 원뿔의 전개도는 다음 그림과 같이 한 개의 밑면과 부채꼴 모양의 옆면으로 이루어져 있으므로 원뿔의 겉넓이도 밑넓이와 옆넓이의 합으로 구할 수 있다.

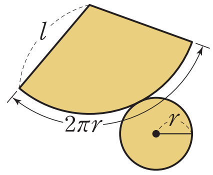


이상을 정리하면 다음과 같다.

뿔의 겉넓이

(뿔의 겉넓이)=(밑넓이)+(옆넓이)

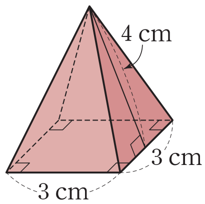
참 고 밑면인 원의 반지름의 길이가 r이고 모선의 길이가 l인 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로



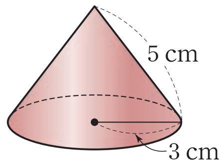
$$(\text{원뿔의 겉넓이})=(\text{밑넓이})+(\text{옆넓이})$$
$$=\pi r^2+\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l=\pi r^2+\pi lr$$

예제 1 **다음 뿔의 겉넓이를 구하시오.**

(1)



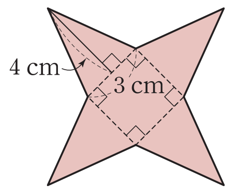
(2)



풀이 (1) $(\text{밑넓이})=3\times 3=9\,(\text{cm}^2)$,

$(\text{옆넓이})=\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)\times 4=24\,(\text{cm}^2)$이므로

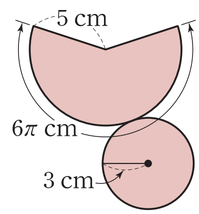
$(\text{겉넓이})=(\text{밑넓이})+(\text{옆넓이})$
$=9+24=33\,(\text{cm}^2)$



(2) $(\text{밑넓이})=\pi\times 3^2=9\pi\,(\text{cm}^2)$,

$(\text{옆넓이})=\frac{1}{2}\times 6\pi\times 5=15\pi\,(\text{cm}^2)$이므로

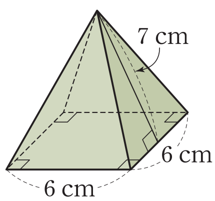
$(\text{겉넓이})=(\text{밑넓이})+(\text{옆넓이})$
$=9\pi+15\pi=24\pi\,(\text{cm}^2)$



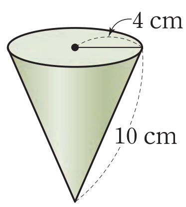
답 (1) 33 cm^2 (2) $24\pi\text{ cm}^2$

문제 1 **다음 뿔의 겉넓이를 구하시오.**

(1)



(2)

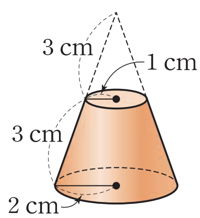


문제 해결

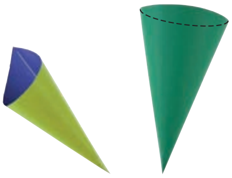
문제 2 **오른쪽 원뿔대에 대하여 다음에 답하시오.**

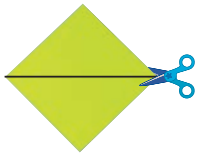
(1) 전개도를 그리시오.

(2) 겉넓이를 구하시오.

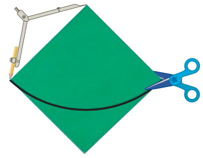


설명하기 색종이를 다음 두 가지 방법으로 잘라 말아 보고 원뿔의 옆면이 부채꼴인 이유를 말해 보자.





[방법 1]



[방법 2]

뿔의 부피

생각톡

밑면이 합동이고 높이가 같은 사각뿔과 사각기둥 모양의 그릇이 있다. 사각뿔 모양의 그릇에 모래를 가득 채워 사각기둥 모양의 그릇에 부으려고 한다.

탐구 사각뿔 모양의 그릇으로 모래를 몇 번 부으면 사각기둥 모양의 그릇이 가득 차는지 말해 보자.

위의 생각톡에서 사각뿔 모양의 그릇으로 모래를 3번 부으면 사각기둥 모양의 그릇을 가득 채울 수 있다. 따라서 사각뿔의 부피는 밑면이 합동이고 높이가 같은 사각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

마찬가지로 밑면이 합동이고 높이가 같은 원뿔과 원기둥 모양의 그릇이 있을 때, 원뿔 모양의 그릇에 모래를 가득 채워 원기둥 모양의 그릇에 3번 부으면 이 그릇을 가득 채울 수 있다. 따라서 원뿔의 부피는 밑면이 합동이고 높이가 같은 원기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

일반적으로 뿔의 부피는 밑면이 합동이고 높이가 같은 기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$임이 알려져 있다. 따라서 뿔의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\text{뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times (\text{기둥의 부피})$$
$$= \frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이})$$

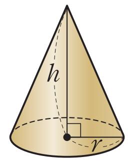
이상을 정리하면 다음과 같다.

뿔의 부피

(뿔의 부피) $= \frac{1}{3} \times$ (밑넓이) $\times$ (높이)

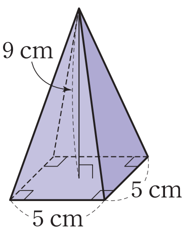
참고 밑면인 원의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔에서

$$(\text{원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이})$$
$$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

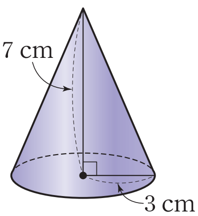


예제 2 다음 뿔의 부피를 구하시오.

(1)



(2)



풀이 (1) (밑넓이) $= 5 \times 5 = 25\,(\text{cm}^2)$이므로

$$(\text{부피}) = \frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이})$$
$$= \frac{1}{3} \times 25 \times 9 = 75\,(\text{cm}^3)$$

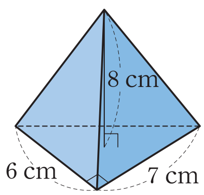
(2) (밑넓이) $= \pi \times 3^2 = 9\pi\,(\text{cm}^2)$이므로

$$(\text{부피}) = \frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이})$$
$$= \frac{1}{3} \times 9\pi \times 7 = 21\pi\,(\text{cm}^3)$$

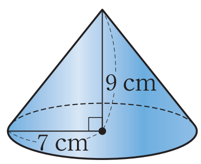
답 (1) 75 cm^3 (2) $21\pi\text{ cm}^3$

문제 3 다음 뿔의 부피를 구하시오.

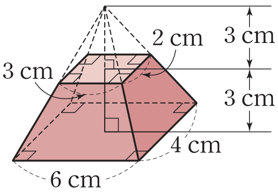
(1)

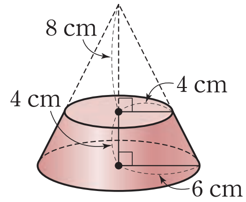


(2)



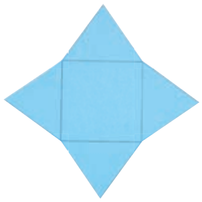
문제 4 다음 뿔대의 부피를 구하시오.

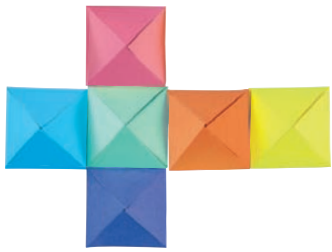
(1)


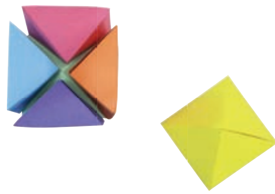
(2)


설명하기

[그림 1]은 밑면이 정사각형이고 높이가 밑면의 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$인 사각뿔의 전개도이다. 이 전개도를 이용하여 만든 6개의 사각뿔을 [그림 2]와 같이 놓은 후 [그림 3]과 같이 사각기둥을 만들어 보자. 이를 이용하여 밑면이 합동이고 높이가 같은 사각뿔과 사각기둥의 부피 사이의 관계를 설명해 보자.

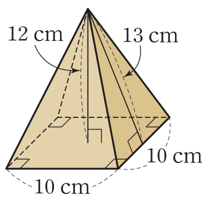

[그림 1]

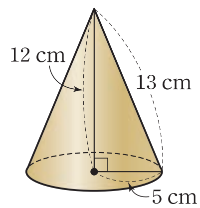

[그림 2]


[그림 3]

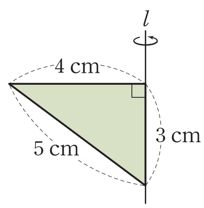
확인하기

1 다음 뿔의 겉넓이와 부피를 구하시오.

(1)


(2)


2 오른쪽 그림과 같은 도형을 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하시오.



3 구의 겉넓이와 부피

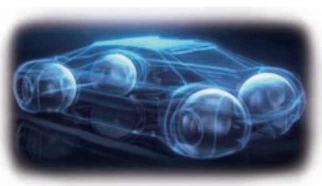
구의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.

구의 겉넓이

생각톡

구 모양의 오렌지 한 개를 반으로 잘라 단면과 크기가 같은 원을 여러 개 그린 후 오렌지 껍질을 잘게 잘라서 원을 채우려고 한다.

탐구 한 개의 오렌지 껍질로 몇 개의 원을 채울 수 있는지 말해 보자.



구 모양의 미래형 타이어

위의 생각톡에서 보통 한 개의 오렌지 껍질로 오렌지를 잘라 그린 원 4개를 채울 수 있다. 따라서 오렌지의 겉넓이는 오렌지를 반으로 자른 단면인 원의 넓이의 4배임을 알 수 있다.

일반적으로 반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이는 반지름의 길이가 r인 원의 넓이의 4배임이 알려져 있다. 따라서 구의 겉넓이는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$(\text{구의 겉넓이})=4\times(\text{원의 넓이})=4\times\pi r^2=4\pi r^2$$

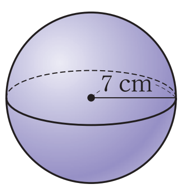
이상을 정리하면 다음과 같다.

구의 겉넓이

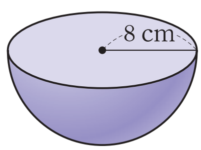
반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이 S는 $\quad S=4\pi r^2$

문제 1 다음 입체도형의 겉넓이를 구하시오.

(1)



(2)



구의 부피

생각톡

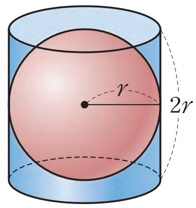
원기둥 모양의 그릇과 반구 모양의 그릇이 있다. 원기둥 모양의 그릇은 밑면의 지름의 길이와 높이가 같고, 반구 모양의 그릇의 지름의 길이는 원기둥 모양의 그릇의 밑면의 지름의 길이와 같다. 반구 모양의 그릇에 모래를 가득 채워 원기둥 모양의 그릇에 부으려고 한다.

탐구 반구 모양의 그릇으로 모래를 몇 번 부으면 원기둥 모양의 그릇이 가득 차는지 말해 보자.

위의 생각톡에서 반구 모양의 그릇으로 모래를 3번 부으면 원기둥 모양의 그릇을 가득 채울 수 있다. 따라서 반구의 부피는 원기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$이므로 구의 부피는 원기둥의 부피의 $\frac{2}{3}$임을 알 수 있다.

구 모양의 저장 탱크

일반적으로 반지름의 길이가 r인 구의 부피는 밑면인 원의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $2r$인 원기둥의 부피의 $\frac{2}{3}$임이 알려져 있다. 따라서 구의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.



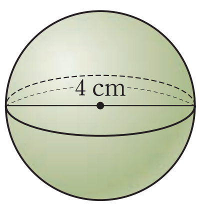
$$(\text{구의 부피})=\frac{2}{3}\times(\text{원기둥의 부피})$$
$$=\frac{2}{3}\times(\pi r^2\times 2r)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

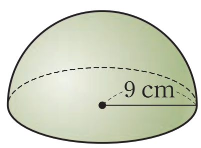
> **구의 부피**
>
> 반지름의 길이가 r인 구의 부피 V는 $\quad V=\frac{4}{3}\pi r^3$

문제 2 다음 입체도형의 부피를 구하시오.

(1)



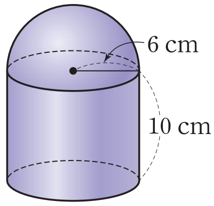
(2)



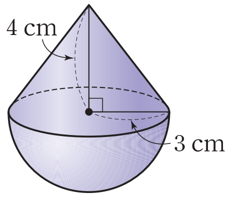
문제 해결

문제 3 다음 입체도형의 부피를 구하시오.

(1)



(2)

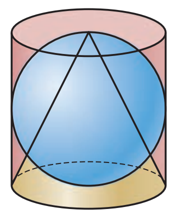


이야기 수학

수학의 노벨상이라고 불리는 필즈상 수상자에게 수여되는 필즈 메달에는 아르키메데스의 옆모습이 새겨져 있다.

원뿔, 구, 원기둥의 부피 사이의 관계

지렛대, 도르래, 투석기 등 우리 생활에 유용한 도구를 발명한 고대 그리스 수학자 아르키메데스(Archimedes, B.C. 287?~B.C. 212)는 평소 기하학에 대한 문제, 특히 원과 구에 대한 문제를 연구하는 것을 좋아했다고 한다. 아르키메데스는 원기둥에 꼭 맞게 들어가는 구와 원뿔에 대하여 원뿔, 구, 원기둥의 부피의 비가 $1:2:3$임을 알아내고, “이처럼 아름다운 것은 없다.”고 말했다고 한다.

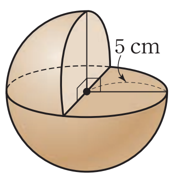


(출처: 김용운·김용국, 『재미있는 수학여행 3』)

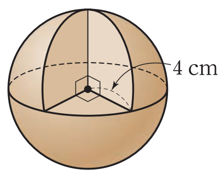
확인하기

1 다음 입체도형의 겉넓이와 부피를 구하시오.

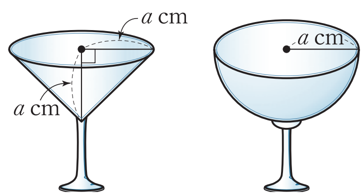
(1)



(2)



사고력+ 오른쪽 그림과 같은 원뿔 모양의 유리잔에 물을 가득 채워 반구 모양의 유리잔에 부을 때, 몇 번을 부으면 반구 모양의 유리잔이 가득 차는지 구하시오.
(단, 유리잔의 두께는 생각하지 않는다.)



중단원 마무리

Ⅵ-2 입체도형의 겉넓이와 부피

정답 및 풀이 304쪽

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

1 기둥의 겉넓이와 부피 229쪽

(1) (기둥의 겉넓이)$=$(밑넓이)$\times\boxed{}+$(옆넓이)

(2) (기둥의 부피)$=$(밑넓이)$\times$($\boxed{}$)

2 뿔의 겉넓이와 부피 234쪽

(1) (뿔의 겉넓이)$=$(밑넓이)$+$(옆넓이)

(2) (뿔의 부피)$=\boxed{}\times$(밑넓이)$\times$(높이)

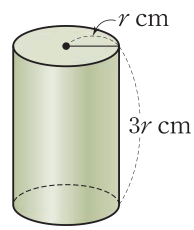
3 구의 겉넓이와 부피 239쪽

반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이 S와 부피 V는

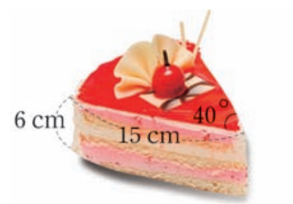
$S=\boxed{}$, $V=\boxed{}$

표준 문제

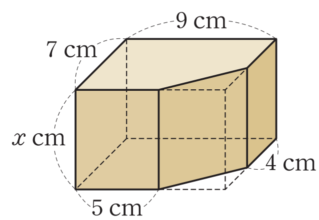
01 오른쪽 원기둥의 겉넓이가 $32\pi\ \mathrm{cm}^2$일 때, r의 값을 구하시오.



02 오른쪽은 밑면이 부채꼴 모양인 조각 케이크이다. 이 케이크의 부피를 구하시오. (단, 장식의 부피는 생각하지 않는다.)

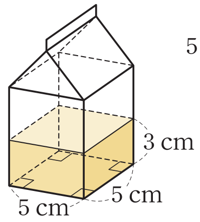


문제 해결 **03** 오른쪽 그림은 직육면체의 일부를 잘라 낸 것이다. 이 입체도형의 부피가 $342\ \mathrm{cm}^3$일 때, x의 값을 구하시오.

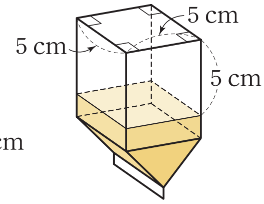


창의 · 융합

04 [그림 1]과 같이 우유갑 안에 높이가 3 cm 만큼 우유가 남아 있다. 우유갑을 거꾸로 하면 [그림 2]와 같이 우유가 없는 부분의 높이가 5 cm가 된다고 할 때, 우유갑 전체의 부피를 구하시오.
(단, 우유갑의 두께는 생각하지 않는다.)

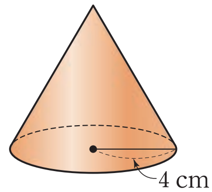


[그림 1]

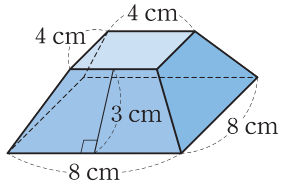


[그림 2]

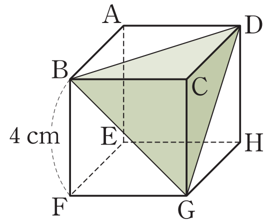
05 오른쪽 원뿔의 겉넓이가 48π cm^{2}일 때, 이 원뿔의 모선의 길이를 구하시오.



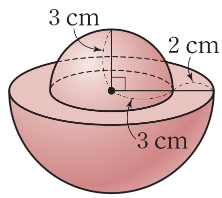
06 오른쪽은 밑면이 정사각형인 사각뿔대이다. 이 사각뿔대의 겉넓이를 구하시오.



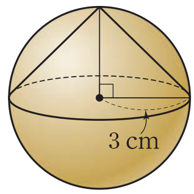
07 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4 cm인 정육면체를 세 꼭짓점 B, G, D를 지나는 평면으로 잘라 낸 입체도형의 부피를 구하시오.



08 오른쪽 그림은 크기가 다른 두 개의 반구를 중심이 같도록 포개어 놓은 것이다. 이 입체도형의 겉넓이를 구하시오.



서술형 **09** 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 3 cm인 구의 내부에 밑면의 반지름의 길이가 3 cm인 원뿔이 꼭 맞게 들어 있을 때, 원뿔과 구의 부피의 비를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

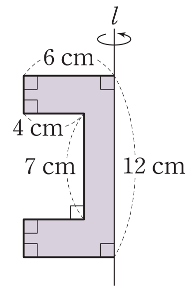


도전 문제

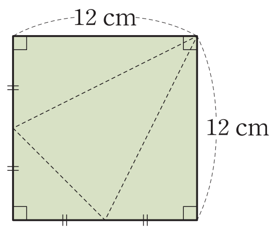
서술형 **10** 오른쪽 그림과 같은 평면도형을 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 겉넓이

(2) 부피



11 오른쪽 전개도를 접어서 만든 입체도형의 부피를 구하시오.



서술형 **12** 반지름의 길이가 4 cm인 쇠구슬 한 개의 표면을 칠하려면 20 mL의 페인트가 필요하다고 한다. 다음에 답하시오.

(1) 반지름의 길이가 4 cm인 쇠구슬 한 개를 녹여서 반지름의 길이가 1 cm인 쇠구슬을 몇 개 만들 수 있는지 구하시오.

(2) (1)에서 만든 반지름의 길이가 1 cm인 쇠구슬의 표면을 모두 칠하는 데 필요한 페인트의 양을 구하시오.

대단원 마무리

정답 및 풀이 305쪽

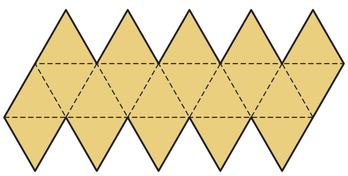
01 칠면체인 것을 보기에서 모두 고르시오.

보기

(ㄱ) 오각기둥	(ㄴ) 육각기둥
(ㄷ) 칠각기둥	(ㄹ) 사각뿔
(ㅁ) 오각뿔	(ㅂ) 육각뿔
(ㅅ) 오각뿔대	(ㅇ) 육각뿔대

02 모서리의 개수가 10인 각뿔의 면의 개수가 x, 꼭짓점의 개수가 y일 때, $x+y$의 값을 구하시오.

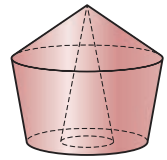
03 다음 그림과 같이 전개도가 합동인 정삼각형으로 이루어진 정다면체의 꼭짓점의 개수를 구하시오.

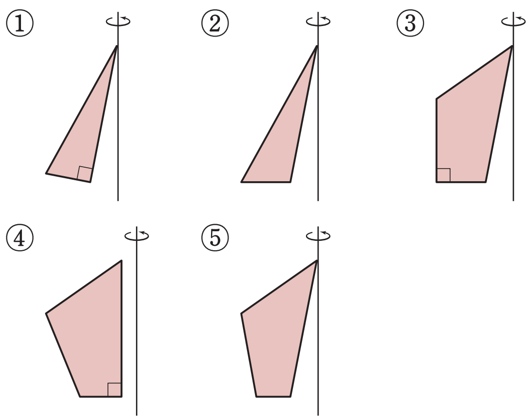


04 다음에서 회전체의 개수를 구하시오.

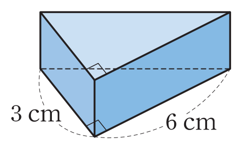
원뿔대	삼각뿔대	원기둥
사각기둥	원뿔	정사면체
정십이면체	반구	직육면체

05 오른쪽은 속이 원뿔 모양으로 비어 있는 회전체이다. 다음 중에서 어떤 평면도형을 회전시킨 것인가?

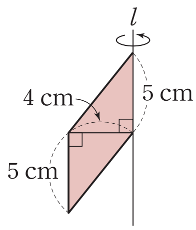




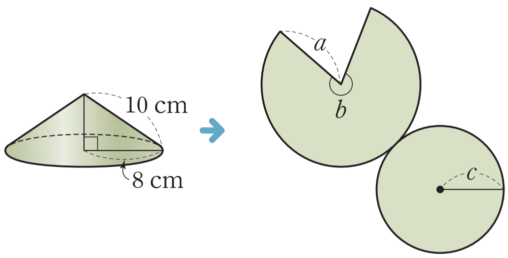
06 오른쪽 각기둥의 부피가 18 cm^3일 때, 이 각기둥의 높이를 구하시오.



07 오른쪽 그림과 같은 평면도형을 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체의 부피를 구하시오.

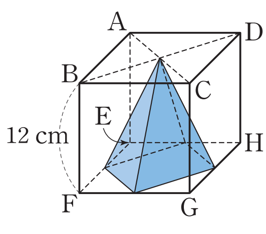


08 다음 그림과 같은 원뿔과 그 전개도에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

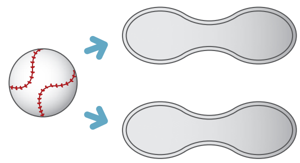


① a의 길이는 10 cm이다.
② $\angle b$의 크기는 $288°$이다.
③ c의 길이는 8 cm이다.
④ 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는 16π cm이다.
⑤ 원뿔의 겉넓이는 $150\pi\ \text{cm}^2$이다.

09 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12 cm인 정육면체에서 면 EFGH의 네 모서리의 중점을 연결한 사각형을 밑면으로 하고, 면 ABCD의 두 대각선의 교점을 꼭짓점으로 하는 입체도형의 부피를 구하시오.

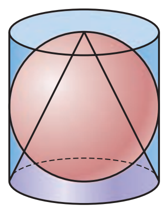


10 다음 그림과 같이 야구공의 겉면은 합동인 두 개의 조각으로 이루어져 있다. 야구공을 반지름의 길이가 4 cm인 구로 생각할 때, 겉면을 이루는 조각 한 개의 넓이를 구하시오.



11 겉넓이가 $16\pi\ \text{cm}^2$인 구의 부피를 구하시오.

12 오른쪽 그림과 같이 원기둥 안에 구와 원뿔이 꼭 맞게 들어 있다. 구의 부피가 $36\pi\ \text{cm}^3$일 때, 원뿔과 원기둥의 부피의 합을 구하시오.

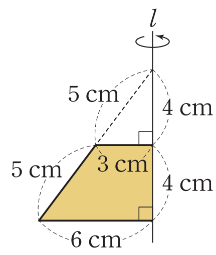


서술형

13 면의 모양이 정팔각형인 정다면체가 없는 이유를 설명하시오.

풀이

15 오른쪽 그림과 같은 평면도형을 직선 l을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체에 대하여 다음에 답하시오.

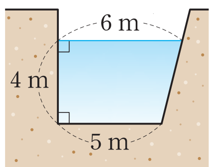


(1) 회전체와 그 전개도를 그리시오.

(2) 회전체의 겉넓이를 구하시오.

풀이

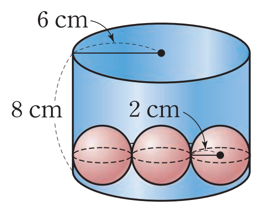
14 어떤 수로의 단면의 모양이 오른쪽 그림과 같이 일정하다. 이 수로에 물이 분속 40 m의 속력으로 흐를 때, 5분 동안 흐른 물의 양을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

16 오른쪽 그림과 같이 높이가 8 cm, 밑면의 반지름의 길이가 6 cm인 원기둥 모양의 그릇에 반지름의 길이가 2 cm인 쇠구슬 3개를 넣은 상태에서 물을 가득 채우려고 한다. 필요한 물의 부피를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, 그릇의 두께는 무시한다.)



풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 다면체의 성질을 이해한다.			
❷ 회전체의 성질을 이해한다.			
❸ 기둥, 뿔, 구의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트

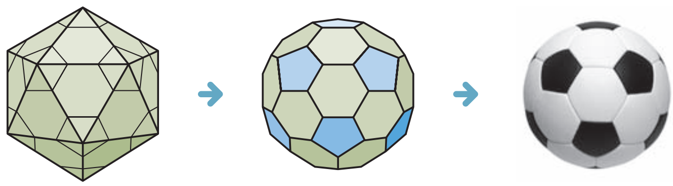
준정다면체와 축구공

두 종류 이상의 정다각형으로 이루어지고 각 꼭짓점에 모인 면의 배치가 서로 같은 다면체를 준정다면체라고 한다. 준정다면체는 고대 그리스 수학자 아르키메데스(Archimedes, B.C. 287?~B.C. 212)가 고안했다고 하여 '아르키메데스의 다면체'라고 하기도 한다. 준정다면체는 모두 13가지가 있는데, 5가지 정다면체를 여러 가지 방법으로 깎거나 부풀리는 등 변형하여 만들 수 있다.

우리가 알고 있는 축구공도 준정다면체를 이용하여 만들 수 있다.

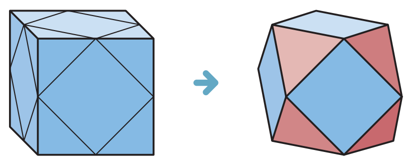
먼저 정이십면체의 각 모서리를 삼등분한 점을 이어서 잘라 내면 잘라 낸 면의 모양은 정오각형이 되고 원래의 정삼각형 모양의 면은 정육각형이 된다. 따라서 이 다면체는 모든 면이 정오각형과 정육각형으로 이루어지고 각 꼭짓점에 2개의 정육각형과 1개의 정오각형이 모인 준정다면체이다. 이 다면체를 '깎은 정이십면체'라고 한다.

가죽으로 깎은 정이십면체를 만든 후 바람을 넣으면 축구공이 된다.



정이십면체 깎은 정이십면체 축구공

과제 1 준정다면체 중에서 육팔면체는 정육면체를 변형한 것이다. 정육면체에서 육팔면체를 만드는 방법을 설명해 보자.



정육면체 육팔면체

과제 2 깎은 정이십면체와 육팔면체를 제외한 준정다면체 중에서 하나를 선택하여 만드는 방법과 특징을 조사한 후 발표해 보자.

세상 속 수학

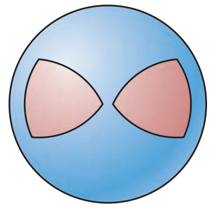
Math X Architecture

시드니 오페라 하우스에 담긴 구의 성질

시드니 오페라 하우스는 하늘과 땅과 바다 어디에서 보아도 완벽한 곡선을 이루는 아름답고 혁신적인 건축물로, 특히 새하얀 돛을 단 작은 배들이 모여 있는 것처럼 보이는 독창적인 지붕이 유명하다.

오페라 하우스의 설계는 덴마크 건축가 웃손(Utzon, J., 1918~2008)이 맡았는데, 웃손은 부인이 잘라준 오렌지 조각에서 아이디어를 얻었다고 한다. 그러나 '오렌지 껍질'과 같은 모양의 지붕을 만드는 데 문제가 발생했다. 지붕을 만들려면 휘어진 삼각형 조각 2개를 맞대어 붙여야 했는데, 부드럽게 휘어진 삼각형 조각 2개를 똑같이 만드는 것이 어려웠기 때문이다.

이 문제는 구를 이용하여 해결하였다. 하나의 구에서 크기가 같은 두 구면 삼각형을 잘라 내면 똑같이 휘어진 모양이 되는 성질을 이용한 것이다.



이와 같이 수학적 성질을 활용하면 복잡해서 불가능해 보이는 건축물을 완성할 수 있는 아이디어를 얻을 수 있다. 실제로 오페라 하우스가 완성되기 전에는 많은 건축가들이 곡면 형태의 디자인을 건축물로 구현하지 못해서 좌절을 겪었다고 한다. 오페라 하우스는 구의 성질을 활용하여 곡면 형태의 디자인을 구현한 최초의 건축물로, 그 창의력과 기술 혁신을 인정받아 유네스코 세계 유산에 등재되었으며 이후의 다양한 건축물의 설계와 완성에 많은 영향을 주었다.

(출처: 『한국일보』, 2014. 6. 16.)

진로 탐색

건축가 | 건물을 짓기 위해 계획을 세우고 설계, 공사, 감리 등의 업무를 한다.

Ⅶ 통계

배운 내용 — **이 단원의** 내용 — **배울** 내용

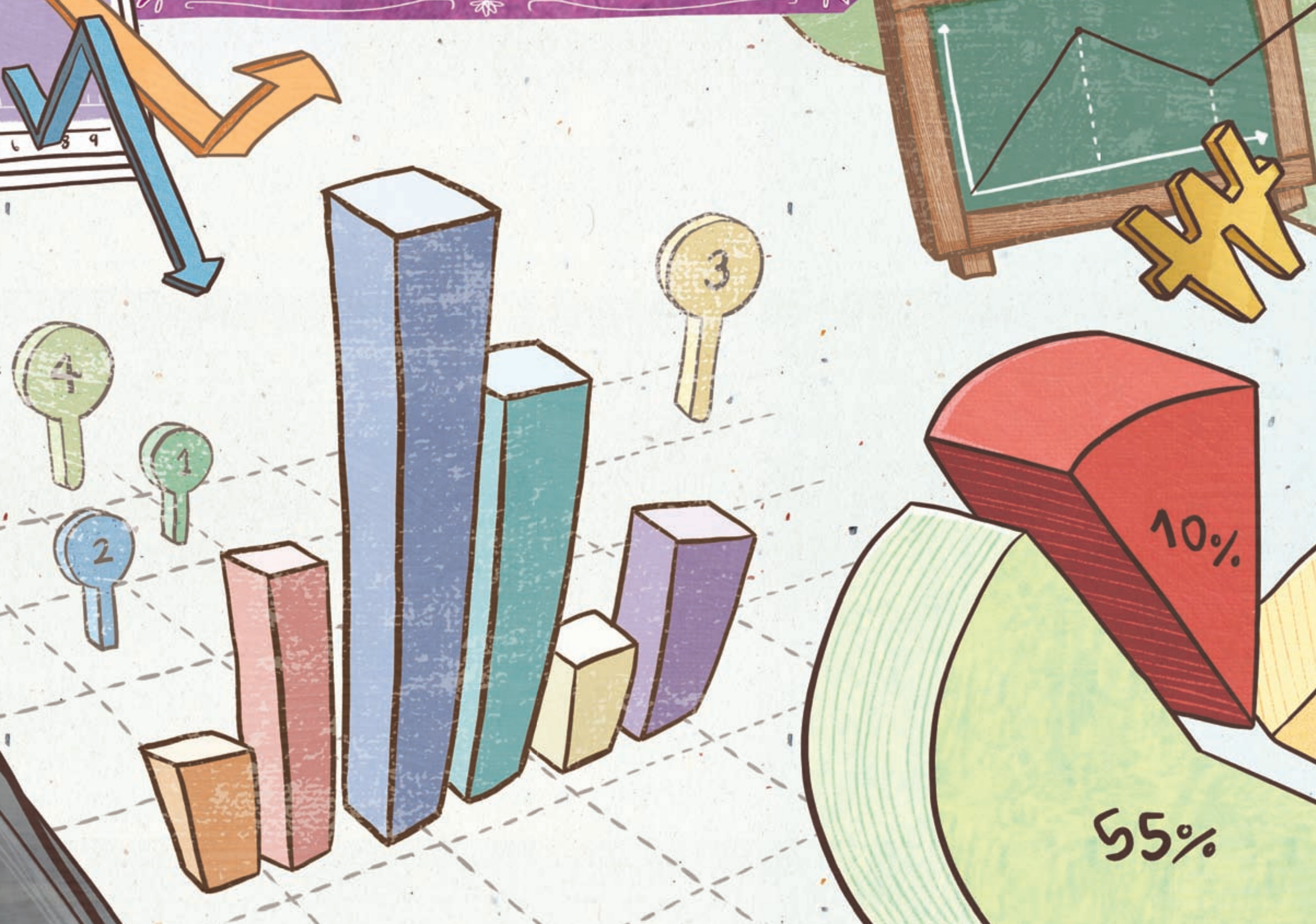
초 3~4
- 막대그래프
- 꺾은선그래프

초 5~6
- 그림그래프
- 띠그래프
- 원그래프

❶ 자료의 정리와 해석
- 줄기와 잎 그림, 도수분포표
- 히스토그램과 도수분포다각형
- 상대도수
- 통계적 문제 해결

중 2
- 확률

중 3
- 대푯값
- 산포도



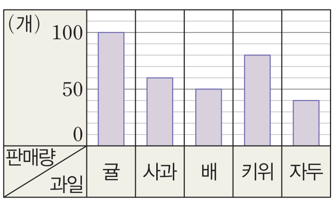

저
고
동해
22
저
황해
20
17
NEWS
우리는 정보를 얻고 올바른 판단을 내릴 목적으로 **자료를 수집**한다. 이때 자료를 분석할 수 있도록 **표나 그래프로 정리**할 필요가 있다.
이 단원에서는 자료를 수집, 정리, 해석하는 방법을 알아본다.
고
NEWS
25%

1 자료의 정리와 해석

준비 학습

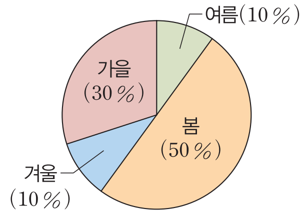
막대그래프

❶ 오른쪽은 어느 과일 가게에서 오늘 하루 판매한 과일의 양을 나타낸 막대그래프이다. 판매량이 가장 많은 과일과 가장 적은 과일을 차례대로 말하시오.



원그래프

❷ 오른쪽은 서윤이네 반 학생 20명이 가장 좋아하는 계절을 조사하여 나타낸 원그래프이다. 가을을 좋아하는 학생 수를 구하시오.



줄기와 잎 그림, 도수분포표

자료를 줄기와 잎 그림, 도수분포표로 나타내고 해석할 수 있다.

줄기와 잎 그림

생각톡

동물의 몸의 길이, 몸무게, 수명이 적힌 카드를 기준에 맞춰 순서대로 나열하는 보드게임이 있다. 〈표 1〉은 보드게임의 카드에 적힌 동물의 수명을 조사하여 만든 자료이다.

〈표 1〉 동물의 수명 (단위: 년)

동물	수명	동물	수명	동물	수명	동물	수명
토끼	7	타란툴라	18	양	11	북극곰	22
돌고래	30	백상아리	41	송골매	16	미어캣	9
사자	15	홍학	13	대왕판다	28	킹코브라	20
족제비	8	불곰	32	코요테	11	바닷가재	40
바다코끼리	40	염소	12	기린	26	고슴도치	9

탐구 ① 송골매보다 수명이 긴 동물은 몇 종인지 말해 보자.

탐구 ② 탐구 ①을 알아보기 쉽게 자료를 정리하는 방법을 말해 보자.

위의 생각톡에서 동물의 수명과 같이 자료를 수량으로 나타낸 것을 **변량**이라고 한다.

〈표 1〉은 각 동물의 수명을 알아보기에는 편리하지만 특정 동물보다 수명이 긴 동물이 몇 종인지 알아보기에는 불편하다. 따라서 어떤 조건을 만족시키는 자료의 수나 자료의 전체적인 분포 상태를 쉽게 알아보기 위해서는 조사한 자료를 목적에 맞게 정리할 필요가 있다.

이제 동물의 수명의 분포 상태를 쉽게 알아볼 수 있도록 자료를 정리해 보자. 〈그림 1〉은 〈표 1〉의 자료를 다음 순서에 따라 정리한 것이다.

❶ 변량을 두 부분으로 나누어 줄기와 잎을 정한다.
❷ 세로선을 긋고 세로선의 왼쪽에 줄기를 작은 수부터 세로로 쓴다.
❸ 세로선의 오른쪽에 각 줄기에 해당되는 잎을 가로로 쓴다. 이때 중복되는 잎이 있으면 중복된 횟수만큼 쓴다.
❹ 그림의 오른쪽 위에 '줄기|잎'을 설명한다.

잎이 작은 수부터 순서대로 쓰면 자료를 분석할 때 편리하다.

〈그림 1〉 (0|7은 7년)

줄기	잎
0	7 8 9 9
1	1 1 2 3 5 7 8
2	0 2 6 8
3	0 2
4	0 0 1

이와 같은 방법으로 나타낸 그림을 **줄기와 잎 그림**이라고 한다. 줄기와 잎 그림을 활용하면 원래의 값을 정확히 알 수 있을 뿐만 아니라 자료의 전체적인 분포 상태도 쉽게 알아볼 수 있다.

예제 1 **다음은 수경이네 반 학생들의 50 m 달리기 기록을 측정하여 만든 자료이다. 물음에 답하시오.**

주어진 변량이 소수이면 소수점을 기준으로 하여 변량을 줄기와 잎으로 나눌 수 있다.

50 m 달리기 기록 (단위: 초)

8.1	7.9	8.8	9.7	6.8
6.3	9.1	7.5	8.3	7.7
7.0	7.2	6.5	9.6	8.5
9.2	8.2	8.2	7.7	8.9
8.6	6.8	9.4	8.8	9.0

(1) 위의 자료를 줄기와 잎 그림으로 나타내시오.
(2) 기록이 8.5초 이하인 학생 수를 구하시오.
(3) (1)의 줄기와 잎 그림에서 알 수 있는 분포의 특징을 말하시오.

통그라미(http://tong.kostat.go.kr)를 이용한 줄기와 잎 그림

풀이 (1) 위의 자료에서 일의 자리의 숫자를 줄기로, 소수점 아래 첫째 자리의 숫자를 잎으로 정하여 줄기와 잎 그림을 나타내면 오른쪽과 같다.

(6|3은 6.3초)

줄기	잎
6	3 5 8 8
7	0 2 5 7 7 9
8	1 2 2 3 5 6 8 8 9
9	0 1 2 4 6 7

(2) 기록이 8.5초 이하인 학생은 15명이다.
(3) 예 기록이 8초대인 학생이 가장 많다.

답 풀이 참조

문제 1 다음은 어느 중학교 영화 감상반 학생들이 1년 동안 관람한 영화의 수를 조사하여 만든 자료이다. 물음에 답하시오.

관람한 영화의 수 (단위: 편)

8	11	25	9
14	15	41	17
24	21	38	35
10	28	23	36
18	13	42	17

(0|8은 8편)

줄기	잎
0	8
1	
2	
3	
4	

(1) 줄기와 잎 그림을 완성하시오.

(2) 잎이 가장 많은 줄기를 구하시오.

(3) (1)의 줄기와 잎 그림에서 알 수 있는 분포의 특징을 말하시오.

도수분포표

생각톡

통합대기환경지수는 미세 먼지, 초미세 먼지, 오존, 일산화탄소, 이산화탄소, 아황산가스의 6가지 오염 물질에 대한 대기 오염도를 나타내는 값으로, 수치가 클수록 대기 상태가 좋지 않음을 나타낸다.

오른쪽은 어느 지역의 5월 한 달 동안의 통합대기환경지수를 나타낸 것이다.

(출처: 한국환경공단, 2016)

탐구 통합대기환경지수가 100 이상 120 미만인 날은 모두 며칠인지 말해 보자.

위의 생각톡의 자료는 각 날의 통합대기환경지수를 알아보기에는 편리하지만 특정한 날의 지수가 상대적으로 낮은 편인지 높은 편인지 알아보거나 통합대기환경지수가 100 이하인 날수 등을 알아보기에는 불편하다. 따라서 이러한 정보를 쉽게 알아보려면 수집한 자료를 목적에 맞게 정리할 필요가 있다.

자료의 수를 셀 때에는
一, 丅, 下, 𤴓, 正
또는 /, //, ///, ////, ~~////~~
를 사용하면 편리하다.

〈표 2〉는 **생각톡**의 자료에서 통합대기환경지수를 20 간격으로 구분하여 구간을 정하고, 각 구간에 해당하는 날수를 정리한 것이다. 이와 같이 자료를 정리하면 전체적인 분포 상태를 알아보기에 편리하다.

〈표 2〉

통합대기환경지수	날수(일)	
40^{이상} ~ 60^{미만}	~~////~~	5
60 ~ 80	~~////~~ ~~////~~	10
80 ~ 100	~~////~~ ////	9
100 ~ 120	///	3
120 ~ 140	/	1
140 ~ 160	/	1
160 ~ 180	//	2
합계		31

〈표 2〉에서와 같이 변량을 일정한 간격으로 나눈 구간을 **계급**, 구간의 너비를 **계급의 크기**, 각 계급에 속하는 자료의 수를 그 계급의 **도수**라고 한다.

이때 〈표 2〉와 같이 자료를 몇 개의 계급으로 나누고 각 계급의 도수를 나타낸 표를 **도수분포표**라고 한다.

도수분포표를 만들 때, 계급의 개수는 자료의 양에 따라 보통 5~15개 정도로 하는 것이 적당하다. 이때 계급의 크기는 모두 같게 하는 것이 일반적이다.

예를 들어 〈표 2〉에서 계급은 40 이상 60 미만, 60 이상 80 미만, ⋯, 160 이상 180 미만이고, 계급의 크기는 20이다. 또 통합대기환경지수가 100 이상 120 미만인 계급의 도수는 3일이다.

예제 2

오른쪽은 희진이네 반 학생 20명의 컵 스택 기록을 측정하여 만든 자료이다. 다음에 답하시오.

컵 스택 기록 (단위: 초)

25.1	18.3	16.0	20.3	18.7
15.5	11.7	17.4	14.3	19.6
21.0	28.5	13.4	19.8	19.2
16.8	18.3	20.8	18.5	17.0

컵 스택(cup stack)은 12개의 컵을 다양한 방법으로 쌓았다가 허무는 경기이다.

(1) 첫 번째 계급이 11초부터 시작하고 계급의 크기가 3초인 도수분포표를 만드시오.

(2) 기록이 20초 미만인 학생 수를 구하시오.

(3) (1)의 도수분포표에서 알 수 있는 분포의 특징을 말하시오.

풀이 (1) 도수분포표는 오른쪽과 같다.

(2) 기록이 20초 미만인 학생 수는

$2+4+9=15$

(3) 예 기록이 17초 이상 20초 미만인 학생이 가장 많다.

답 풀이 참조

기록(초)	도수(명)
11^{이상} ~ 14^{미만}	2
14 ~ 17	4
17 ~ 20	9
20 ~ 23	3
23 ~ 26	1
26 ~ 29	1
합계	20

통그라미를 이용한 도수분포표

문제 2 다음은 2016년 각 중학교의 평균 입학생 수를 시도별로 조사하여 만든 자료이다. 물음에 답하시오.

(단위: 명)

지역	입학생 수	지역	입학생 수	지역	입학생 수	지역	입학생 수
서울	202	부산	162	대구	191	인천	205
광주	184	대전	176	울산	180	세종	149
경기	207	강원	90	충북	116	충남	106
전북	86	전남	64	경북	79	경남	120
제주	150						

(출처: 학교알리미, 2016)

(1) 첫 번째 계급이 60명부터 시작하고 계급의 크기가 30명인 도수분포표를 만드시오.

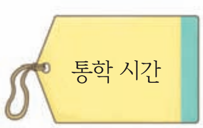
(2) 도수가 가장 큰 계급을 구하시오.

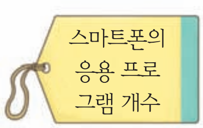
(3) (1)의 도수분포표에서 알 수 있는 분포의 특징을 말하시오.

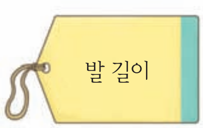
입학생 수(명)	도수(곳)
이상 ~ 미만	
~	
~	
~	
~	
합계	

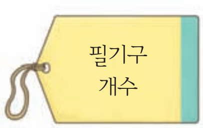
프로젝트

① 아래 주제를 참고하여 모둠별로 주제를 정하고, 우리 반 학생들을 대상으로 조사하여 다음 표를 완성해 보자.









주제: ____

1번		6번		11번		16번		21번		26번		31번	
2번		7번		12번		17번		22번		27번		32번	
3번		8번		13번		18번		23번		28번		33번	
4번		9번		14번		19번		24번		29번		34번	
5번		10번		15번		20번		25번		30번		35번	

② ①에서 자료가 적절히 수집되었는지 판단하고 그 이유를 설명해 보자.

③ ①의 자료를 줄기와 잎 그림 또는 도수분포표로 나타내어 보고, 분포의 특징을 말해 보자.

2 히스토그램과 도수분포다각형

도수분포표를 히스토그램과 도수분포다각형으로 나타내고 해석할 수 있다.

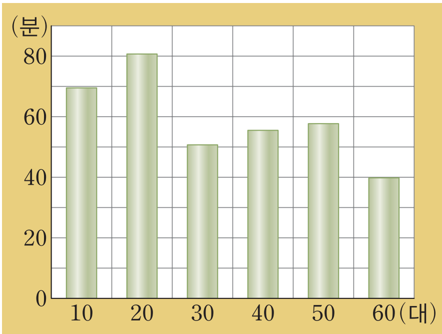
히스토그램

생각톡

다음은 SNS(social network service) 이용자의 하루 평균 SNS 이용 시간을 연령대별로 조사하여 표와 막대그래프로 나타낸 것이다.

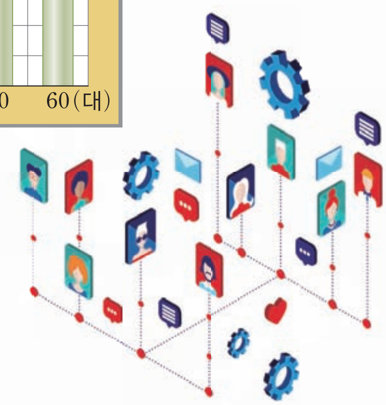
연령대	이용 시간(분)
10대	69.5
20대	80.7
30대	50.7
40대	55.5
50대	57.7
60대	39.8

(출처: 정보통신정책연구원, 2015)



탐구 ① SNS 이용 시간이 긴 연령대부터 순서대로 말해 보자.

탐구 ② 탐구 ①을 해결하기 위해 표와 막대그래프 중 어느 것이 더 편리한지 말해 보자.



위의 생각톡에서 알 수 있듯이 어떤 자료를 그래프로 나타내면 표로 나타내는 것보다 자료의 전체적인 분포 상태를 쉽게 알아볼 수 있다.

이제 도수분포표를 그래프로 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

〈그림 2〉는 통합대기환경지수에 대한 도수분포표 〈표 2〉를 다음 순서에 따라 그래프로 나타낸 것이다.

〈표 2〉

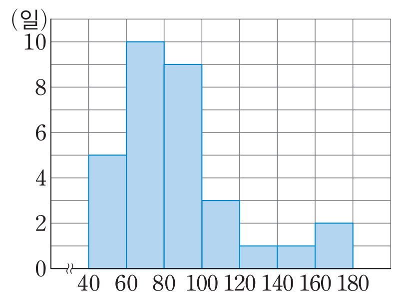
통합대기환경지수	날수(일)
40이상 ~ 60미만	5
60 ~ 80	10
80 ~ 100	9
100 ~ 120	3
120 ~ 140	1
140 ~ 160	1
160 ~ 180	2
합계	31

❶ 가로축에 각 계급의 끝 값을 적는다.

❷ 세로축에 도수를 적는다.

❸ 각 계급에서 계급의 크기를 가로로, 도수를 세로로 하는 직사각형을 그린다.

〈그림 2〉

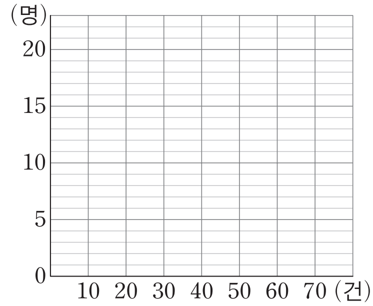


히스토그램(histogram)은 역사(history)와 그림(diagram)의 합성어이다.

이와 같은 방법으로 나타낸 그래프를 **히스토그램**이라고 한다. 히스토그램은 각 계급의 도수를 직사각형의 세로의 길이로 나타내므로 자료의 분포 상태를 한눈에 알아볼 수 있다.

문제 1 **다음은 소정이가 친구들이 하루 동안 발송한 문자 메시지의 건수를 조사하여 나타낸 도수분포표이다. 이 표를 히스토그램으로 나타내시오.**

발송 건수(건)	도수(명)
10이상 ~ 20미만	1
20 ~ 30	2
30 ~ 40	8
40 ~ 50	21
50 ~ 60	6
60 ~ 70	3
합계	41

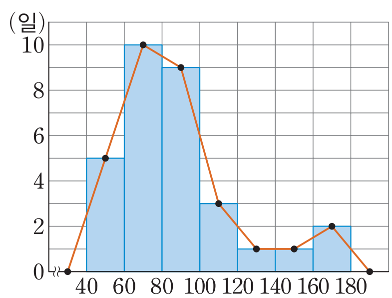


도수분포다각형

도수분포표를 또 다른 그래프로 나타내어 보자.

〈그림 3〉은 〈그림 2〉의 히스토그램을 이용하여 도수분포표를 다음 순서에 따라 그래프로 나타낸 것이다.

〈그림 3〉



❶ 히스토그램에서 각 직사각형의 윗변의 중앙에 점을 찍는다.

❷ 그래프의 양 끝에 도수가 0인 계급이 하나씩 있는 것으로 생각하여 그 중앙에 점을 찍는다.

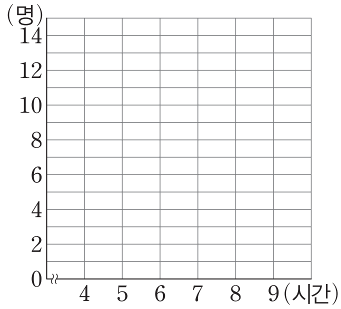
❸ ❶, ❷에서 찍은 점을 선분으로 연결한다.

도수분포다각형을 히스토그램을 그리지 않고 도수분포표로부터 직접 그릴 수도 있다.

이와 같은 방법으로 나타낸 그래프를 **도수분포다각형**이라고 한다. 도수분포다각형도 히스토그램과 마찬가지로 자료의 분포 상태를 한눈에 알아보기에 편리하다.

문제 2 다음 표는 현이네 반 학생들을 대상으로 하루 평균 수면 시간을 조사하여 나타낸 도수분포표이다. 이 표를 도수분포다각형으로 나타내시오.

수면 시간(시간)	도수(명)
4이상 ~ 5미만	1
5 ~ 6	5
6 ~ 7	14
7 ~ 8	8
8 ~ 9	2
합계	30

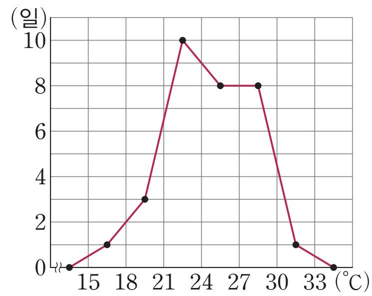


문제 3 오른쪽은 2016년 5월 한 달 동안 충청남도 서산시의 일별 최고 기온을 조사하여 나타낸 도수분포다각형이다. 다음을 구하시오.

(1) 계급의 크기

(2) 도수가 가장 큰 계급

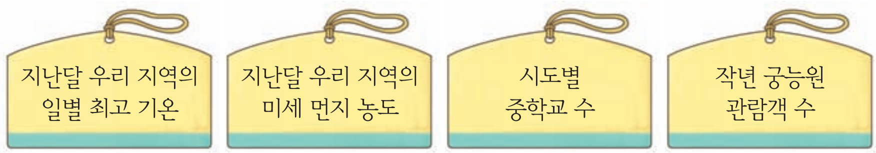
(3) 최고 기온이 27 °C 이상인 날수



(출처: 기상청, 2016)

프로젝트

① 다음 주제를 참고하여 모둠별로 주제를 정하고, 인터넷에서 직접 자료를 수집해 보자.



② ①의 자료를 히스토그램이나 도수분포다각형으로 나타내어 보자.

③ ②에서 알 수 있는 분포의 특징을 말해 보자.

3 상대도수

상대도수를 구하여 이를 그래프로 나타내고, 상대도수의 분포를 이해한다.

상대도수

생각톡

오른쪽 도수분포표는 어느 중학교 학생 50명을 대상으로 하루 평균 스마트폰 이용 시간을 조사하여 나타낸 것이다.

탐구 스마트폰 이용 시간이 180분 이상인 학생들이 전체에서 차지하는 비율은 얼마인지 구해 보자.

이용 시간(분)	도수(명)
$30^{\text{이상}}$ ~ $60^{\text{미만}}$	4
60 ~ 90	9
90 ~ 120	12
120 ~ 150	14
150 ~ 180	9
180 ~ 210	2
합계	50

어떤 자료의 분포를 알아볼 때 도수보다는 도수가 전체에서 차지하는 비율을 고려해야 하는 경우가 있다. 그런데 도수분포표는 이를 알아보기가 쉽지 않다.

각 계급의 도수가 전체에서 차지하는 비율을 알아보기 위해서는 각 계급의 도수를 전체 도수로 나눈 값을 이용해야 한다. 도수분포표에서 전체 도수에 대한 각 계급의 도수의 비율을 그 계급의 **상대도수**라고 한다.

$$(\text{계급의 상대도수})=\frac{(\text{계급의 도수})}{(\text{도수의 총합})}$$

〈표 3〉은 위의 생각톡에서 각 계급의 상대도수를 구하여 만든 상대도수의 분포표이다.

〈표 3〉

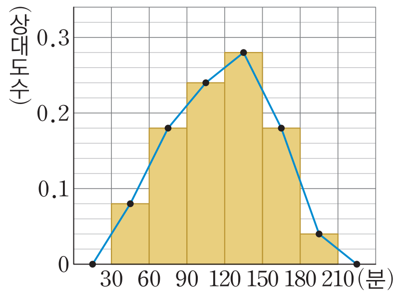
이용 시간(분)	도수(명)	상대도수
$30^{\text{이상}}$ ~ $60^{\text{미만}}$	4	0.08
60 ~ 90	9	0.18
90 ~ 120	12	0.24
120 ~ 150	14	0.28
150 ~ 180	9	0.18
180 ~ 210	2	0.04
합계	50	1

일반적으로 각 계급의 상대도수는 0 이상 1 이하이고, 그 합은 1이다.

도수분포표와 마찬가지로 상대도수의 분포표도 그래프로 나타내면 자료의 분포 상태를 한눈에 알아볼 수 있다.

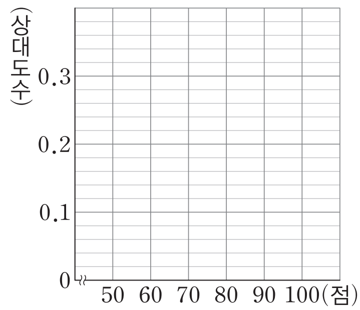
상대도수의 분포표를 그래프로 나타내는 방법은 도수분포표를 히스토그램이나 도수분포다각형으로 나타내는 것과 같다. 이때 그래프의 세로축에는 도수 대신 상대도수를 적는다.

예를 들어 스마트폰 이용 시간에 대한 상대도수의 분포표 〈표 3〉을 그래프로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



문제 1 다음 표는 규호네 반 학생들의 과학 성적을 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하시오.

과학 성적(점)	도수(명)	상대도수
50이상 ~ 60미만	3	
60 ~ 70	5	
70 ~ 80	7	
80 ~ 90	8	
90 ~ 100	2	
합계	25	



(1) 위의 표를 완성하시오.

(2) 과학 성적이 80점 이상인 학생은 전체의 몇 %인지 구하시오.

(3) (1)의 표를 도수분포다각형 모양의 그래프로 나타내시오.

도수의 총합이 다른 두 자료의 분포의 비교

생각톡

오른쪽은 A, B 두 중학교 학생들의 급식 만족도를 조사하여 나타낸 것이다.

탐구 A, B 두 중학교 중에서 급식 만족도가 더 높은 학교를 말해 보자.

급식 만족도(점)	도수(명)	
	A중학교	B중학교
50이상 ~ 60미만	12	3
60 ~ 70	22	7
70 ~ 80	48	14
80 ~ 90	64	40
90 ~ 100	54	36
합계	200	100

앞의 생각톡에서 급식 만족도 점수가 90점 이상 100점 미만인 계급의 도수는

A중학교: 54명, B중학교: 36명

으로 B중학교가 A중학교보다 작다. 그러나 이 계급의 상대도수는

$$\text{A중학교: } \frac{54}{200}=0.27, \quad \text{B중학교: } \frac{36}{100}=0.36$$

으로 B중학교가 A중학교보다 크다.

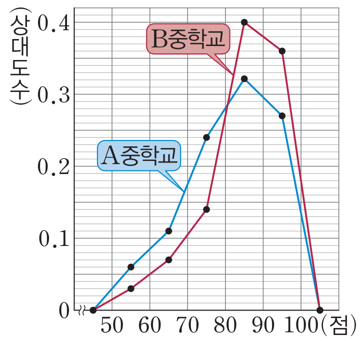
즉 이 계급에 속하는 학생 수가 전체에서 차지하는 비율은 B중학교가 A중학교보다 상대적으로 더 높다고 할 수 있다.

이와 같이 도수의 총합이 다른 두 자료의 분포를 비교할 때에는 각 계급의 도수를 비교하는 것보다 상대도수를 비교하는 것이 더 적절하다.

다음은 앞의 생각톡에서 A, B 두 중학교 학생들의 급식 만족도에 대한 상대도수를 각각 구하여 이를 표와 그래프로 나타낸 것이다.

두 자료의 상대도수의 분포에 대한 그래프를 함께 나타내면 분포 상태를 한눈에 비교할 수 있다.

급식 만족도(점)	상대도수	
	A중학교	B중학교
50이상 ~ 60미만	0.06	0.03
60 ~ 70	0.11	0.07
70 ~ 80	0.24	0.14
80 ~ 90	0.32	0.4
90 ~ 100	0.27	0.36
합계	1	1



상대도수의 분포표와 그 분포의 그래프를 보면 두 중학교 모두 만족도가 80점 이상 90점 미만인 학생의 비율이 가장 높고 50점 이상 60점 미만인 학생의 비율이 가장 낮음을 알 수 있다.

특히 상대도수의 분포에 대한 그래프를 보면 80점 미만에서는 A중학교의 학생의 비율이 더 높고 80점 이상에서는 B중학교의 학생의 비율이 더 높음을 한눈에 알 수 있다.

또 B중학교의 그래프가 A중학교의 그래프보다 전체적으로 오른쪽으로 치우쳐 있으므로 B중학교의 급식 만족도가 A중학교의 급식 만족도보다 상대적으로 높은 편임을 알 수 있다.

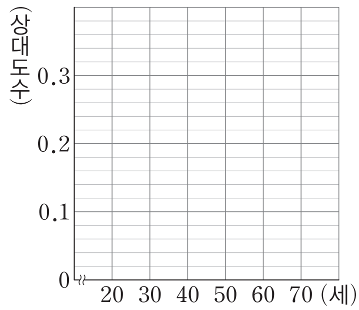
문제 2 다음 표는 A지역 성인 250명과 B지역 성인 200명의 나이를 각각 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하시오.

나이(세)	도수(명)		상대도수	
	A지역	B지역	A지역	B지역
20이상 ~ 30미만	25	32		
30 ~ 40	45	44		
40 ~ 50	50	52		
50 ~ 60	75	40		
60 ~ 70	55	32		
합계	250	200		

(1) 위의 표를 완성하시오.

(2) A지역 성인과 B지역 성인의 나이에 대한 상대도수의 분포표를 도수분포다각형 모양의 그래프로 나타내시오.

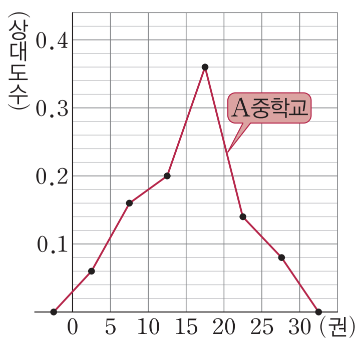
(3) (2)의 그래프에서 알 수 있는 두 지역 성인들의 나이에 대한 분포의 특징을 말하시오.



프로젝트

① 우리 반 학생들의 올해 읽은 책의 권수를 조사하여 아래 표를 완성하고 도수분포다각형 모양의 그래프로 나타내어 보자.

책의 권수(권)	도수(명)	상대도수
0이상 ~ 5미만		
5 ~ 10		
10 ~ 15		
15 ~ 20		
20 ~ 25		
25 ~ 30		
합계		



② 우리 반 학생들과 A중학교 학생들의 그래프의 분포를 비교해 보자.

수학 역량 플러스

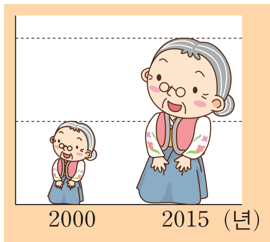
통계 그래프의 함정

의사소통 추론

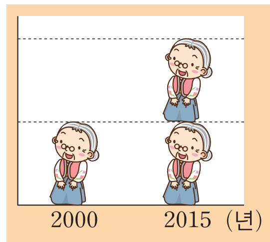
인포그래픽(Infographics)이란 자료 또는 정보를 시각적으로 표현한 것으로, 뉴스나 광고 등에서 자주 볼 수 있다.

인포그래픽에는 그림그래프, 막대그래프, 히스토그램 등 다양한 그래프가 많이 쓰이는데, 그래프를 적절히 사용하면 정보를 빠르고 흥미롭게 전달할 수 있지만 부적절하게 사용하면 정보를 오해하게 하여 잘못된 판단을 일으킬 수도 있다.

예를 들어 [그림 1]은 2000년에 340만 명이던 노인 인구가 2015년에는 680만 명으로 증가했다는 것을 표현한 그래프인데, 사람들은 이 그래프를 보고 노인 인구가 4배 정도 늘었다고 착각하기 쉽다. 정보를 정확하게 전달하기 위해서는 [그림 2]와 같이 나타내야 한다.

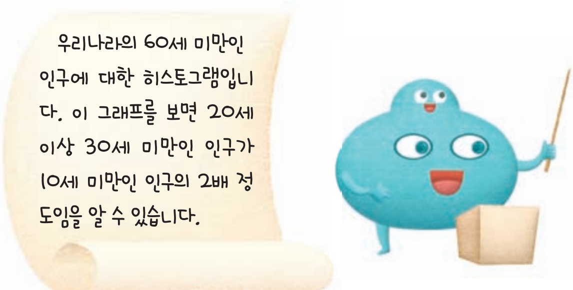


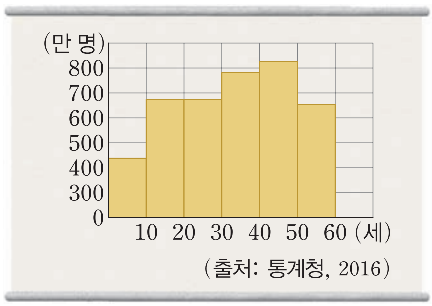
[그림 1]

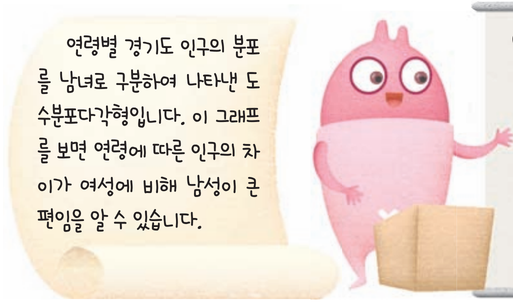


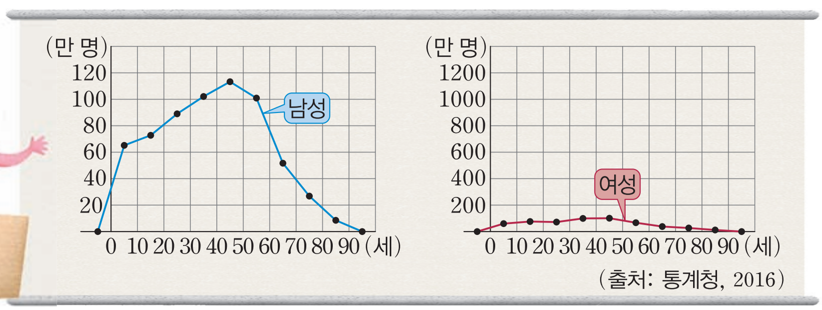
[그림 2]

활동 1 다음 그래프와 그 설명을 보고 잘못된 점을 말해 보자.









공학 도구 활용

컴퓨터 프로그램을 이용하여 자료 정리하기

정보 처리

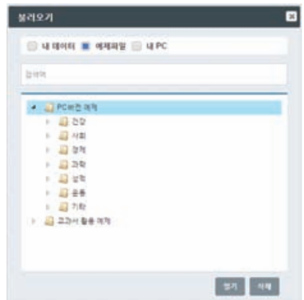
통그라미를 이용하면 주어진 자료를 줄기와 잎 그림이나 도수분포표로 쉽게 나타낼 수 있다. 또 히스토그램과 도수분포다각형을 정확하게 그릴 수 있다.

❶ 자료 입력

스프레드시트에 직접 자료를 입력하거나 인터넷 등에서 찾은 자료를 복사한 후 붙여서 사용할 수 있다.

또 파일에서 불러오기를 선택하여 통그라미에 이미 입력된 예제 파일을 불러와서 사용할 수도 있다.

자료를 입력한 후에는 변수창의 변수명에 자료의 이름을 입력한다.



❷ 표와 그래프 그리기

① 줄기와 잎 그림: 그래프에서 줄기와 잎 그림을 선택한다. 줄기와 잎 그림 알림창에서 변수를 선택하여 분석변수로 지정하고 확인을 클릭한다.

② 히스토그램: 그래프에서 히스토그램을 선택한다. 히스토그램 알림창에서 변수를 선택하여 분석변수로 지정하고, 계급의 시작값과 계급의 크기를 입력하거나 분석변수의 계급수를 입력한 후 확인을 클릭한다.

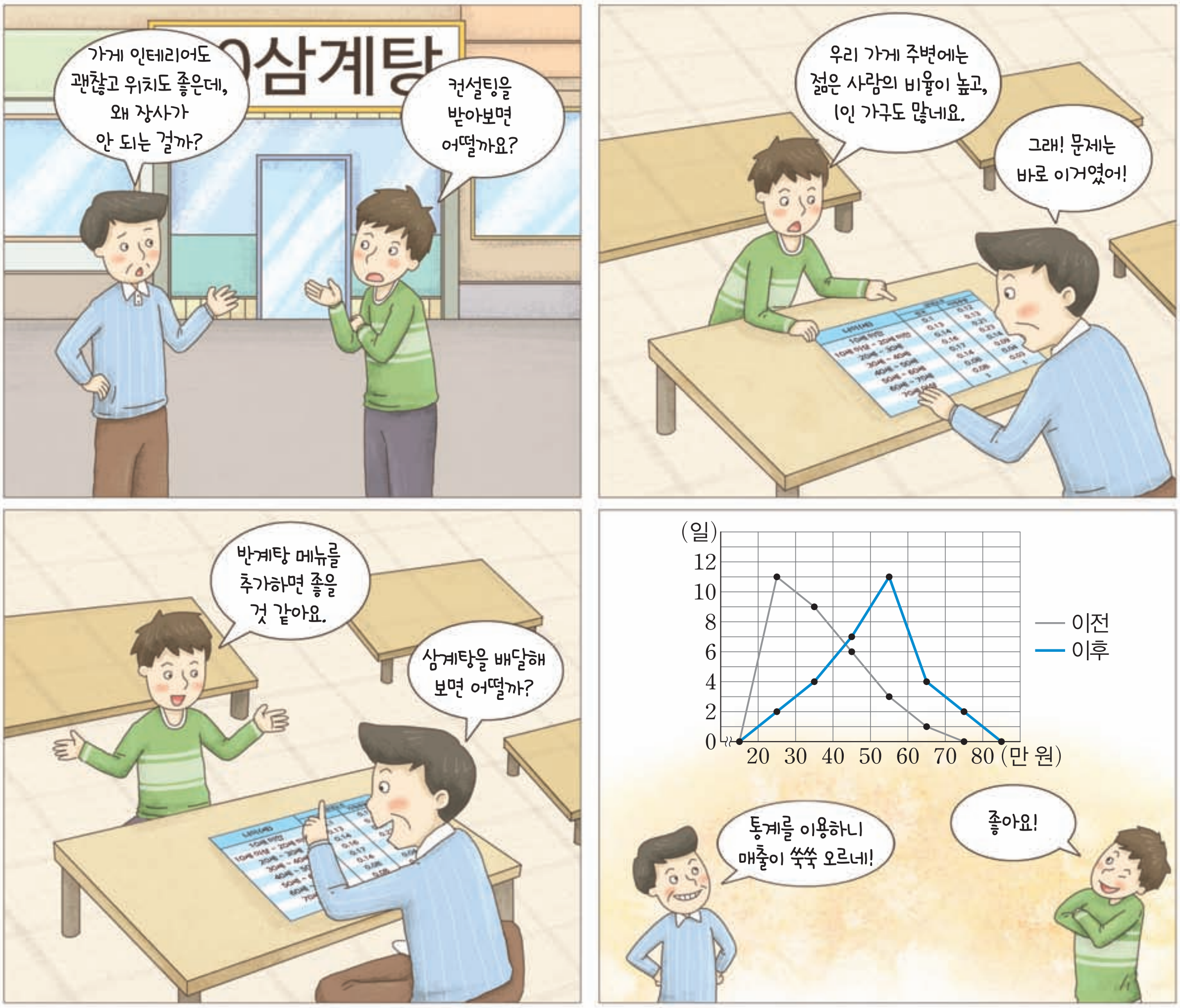
③ 도수분포표: 통계에서 도수분포표를 선택한다. 도수분포표 알림창에서 변수를 선택하여 분석변수로 지정하고 계급의 시작값과 계급의 크기를 입력하거나 분석변수의 계급수를 입력한 후 확인을 클릭한다.

활동 1 통그라미를 이용하여 253쪽 〈표 1〉을 줄기와 잎 그림, 히스토그램으로 나타내고 도수분포표를 만들어 보자.

4 통계적 문제 해결

공학적 도구를 이용하여 실생활과 관련된 자료를 수집하고 표나 그래프로 정리하고 해석할 수 있다.

통계적 문제 해결



(출처: 통계청, 2014)

통계를 이용하여 문제를 해결하기 위해서는 먼저 자료를 수집하고 수집한 자료들을 적절한 방법으로 정리하고 분석한 후 분석한 결과에 근거하여 결론을 내려야 한다.

주제 설정 → 자료 수집 → 자료 분석 → 결과 해석

통계를 이용하여 우리 주변의 문제를 해결해 보자.

은지 생일 선물을 사야 하는데 용돈이 다 떨어졌네. 엄마가 용돈을 좀 올려 주시면 좋을 텐데…. 용돈은 왜 항상 모자라지? 우리 학교 학생들은 용돈을 얼마나 받는지 조사해 봐야겠어.

도훈아, 뭐해?

우리 학교 학생들에게 설문지를 돌려서 용돈에 대한 조사를 하려고 해.

재미있겠다. 설문지에는 무슨 내용을 넣을 거니?

일단 한 달 용돈 액수에 대한 질문을 넣어야 할 것 같고, 형제의 유무도 같이 알아봐야 할 것 같아.

용돈을 어떻게 쓰는지도 물어보면 좋지 않을까?

❶ 주제 설정

통계를 이용하여 문제 해결이 가능할 것 같은 상황이나 사람들을 설득하여 개선하면 좋을 것 같은 상황을 주변에서 찾아 주제로 설정한다. 또 평소에 궁금했거나 연구해 보고 싶었던 문제들을 주제로 설정해도 좋다.

이때 조사하고자 하는 내용을 명확하게 정하고 관련 자료를 모아야 한다.

❷ 자료 수집

설문 조사 또는 실험을 통하여 자료를 수집하거나 인터넷, 문헌 자료 등을 이용하여 자료를 수집한다.

설문 조사를 할 때에는 설문 대상자들이 해당하는 집단을 대표할 수 있는지, 설문지의 질문이 적절한지 등을 판단해야 한다. 특히 두 집단을 서로 비교할 때에는 대상자의 수를 비슷하게 하거나 일치시키는 것이 바람직하다.

인터넷 자료는 국가통계포털, 교육통계서비스 등 믿을 수 있는 사이트의 자료를 이용하는 것이 좋고, 각종 신문이나 도서에서 제시한 통계 자료나 기관에서 발행한 통계 보고서 등에서 자료를 수집해도 좋다. 다만 기존의 자료들을 이용하는 경우에는 그 출처를 반드시 밝혀야 한다.

자료 수집이 완료된 후에는 수집된 자료가 주제에 적절한지 다시 한 번 검토하도록 한다.

프로젝트 - 통계 포스터 만들기

모둠별로 통계 포스터를 만들어 보자.

❶ 주제 설정

모둠별로 주제의 후보를 몇 가지 정하고, 흥미성, 자료 수집 가능성, 명확한 결론 도출 가능성, 창의성 등의 항목을 고려하여 주제를 정해 보자.

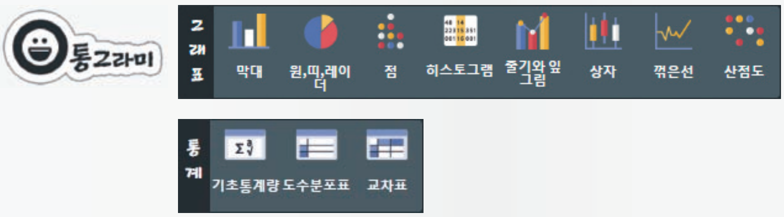
❷ 자료 수집

주제에 맞는 자료를 수집해 보자. 또 수집한 자료가 적절한지 판단하고 그 이유를 설명해 보자.

❸ 자료 분석

수집된 자료를 분석한 후 자료와 가장 어울리고 효과적인 방법으로 자료를 정리한다.

이때 공학적 도구를 사용하면 자료를 막대그래프, 원그래프, 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 등으로 쉽게 나타낼 수 있고 자료를 정확하게 분석할 수 있다. 또 자료에 따라서 도수보다 상대도수로 나타내는 것이 더 효과적일 때가 있으므로 도수와 상대도수를 적절하게 이용한다.



❹ 결과 해석

분석한 자료를 기초로 하여 결과를 해석한다.

이때 자료를 해석하는 과정에서 비약은 없었는지, 처음 설정한 주제와 맥락에 맞는 결과인지 등을 확인하여 결론을 이끌어내야 한다.

(출처: 통계교육원, 2016)

한 달 용돈 액수의 분포는 도수분포표로 정리하는 게 낫겠지?

응. 용돈에 대한 만족도는 막대그래프로, 용돈을 쓰는 용도는 원그래프로 정리하면 좋을 것 같아.

도수분포표를 보니 내 용돈이 적은 게 맞구나.

그렇네. 그리고 원그래프를 보니 용돈을 주로 군것질과 친구 선물을 사는 데 사용하는 것을 알 수 있어.

엄마! 이 통계 자료를 좀 보세요. 저 용돈 올려 주세요!

….

❸ 자료 분석

수집한 자료를 정리하는 데 어떤 방법이 좋을지 토론하고 공학적 도구를 이용하여 수집한 자료를 표나 그래프로 정리해 보자.

❹ 결과 해석

정리한 결과를 해석하여 결론을 도출하고 알아보기 쉽게 정리하여 통계 포스터를 만들어 보자.

✻ 발표 및 평가

모둠별 통계 포스터를 발표하고 평가해 보자.

- 주제를 가장 잘 설정한 모둠은?
- 자료를 가장 잘 수집한 모둠은?
- 자료를 가장 잘 분석한 모둠은?
- 결론을 가장 잘 도출한 모둠은?
- 통계 포스터를 가장 잘 만든 모둠은?

정답 및 풀이 308쪽

중단원 마무리

VII-1 자료의 정리와 해석

스스로 완성해 봅시다

개념 다시 보기

① 줄기와 잎 그림, 도수분포표

253쪽

(1) ☐ : 자료를 수량으로 나타낸 것

(2) ☐ : 변량을 줄기와 잎으로 구분하여 나타낸 그림

(3) ☐ : 자료를 몇 개의 계급으로 나누고 각 계급의 도수를 나타낸 표

② 히스토그램과 도수분포다각형

258쪽

(1) 히스토그램: 도수분포표의 계급의 크기를 가로로, ☐를 세로로 하는 직사각형으로 나타낸 그래프

(2) ☐ : 히스토그램에서 그래프의 양 끝에 도수가 0인 계급이 하나씩 있는 것으로 생각하여 그 중앙의 점과 각 직사각형의 윗변의 중앙의 점을 선분으로 연결하여 그린 그래프

③ 상대도수

261쪽

(1) ☐ : 전체 도수에 대한 각 계급의 도수의 비율

(2) 상대도수의 분포표: 각 계급의 상대도수를 나타낸 표

표준 문제

01 오른쪽은 2015년에 발생한 태풍의 최대 풍속을 조사하여 나타낸 줄기와 잎 그림이다. 최대 풍속이 52 m/s 이상인 태풍은 전체의 몇 %인지 반올림하여 소수점 아래 첫째 자리까지 구하시오.

(1|9는 19 m/s)

줄기	잎
1	9
2	1 4 4 7 7 9
3	5 6 9
4	0 3 3 5 9 9 9 9
5	0 0 1 3 3 3 3 6 8

(출처: 기상청, 2015)

서술형 **02** 오른쪽은 현경이네 반 학생 30명의 오래 매달리기 기록을 조사하여 나타낸 도수분포표이다. 다음에 답하시오.

(1) A의 값을 구하시오.

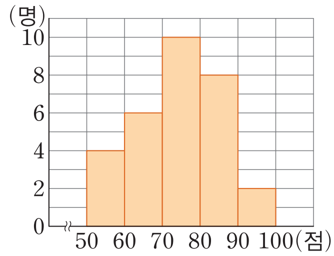
(2) 오래 매달리기 기록이 10번째로 좋은 학생이 속한 계급을 구하시오.

기록(초)	도수(명)
0이상 ~ 10미만	4
10 ~ 20	6
20 ~ 30	11
30 ~ 40	A
40 ~ 50	3
합계	30

03

다음은 희원이네 반 학생들의 도덕 성적을 조사하여 도수분포표와 히스토그램으로 나타낸 것이다. $A+B+C$의 값을 구하시오.

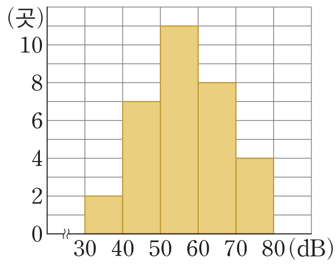
도덕 성적(점)	도수(명)
50이상 ~ 60미만	4
60 ~ 70	A
70 ~ 80	10
80 ~ 90	B
90 ~ 100	2
합계	C



04

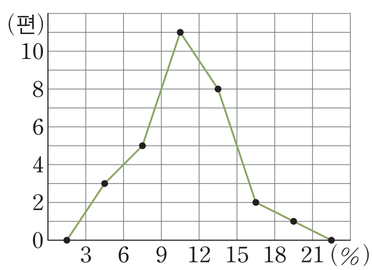
dB(데시벨)은 소리의 상대적인 크기를 나타내는 단위이다.

오른쪽은 어느 도시의 지역별 소음도를 조사하여 나타낸 히스토그램이다. 소음도가 60 dB(데시벨) 이상 70 dB(데시벨) 미만인 지역은 전체의 몇 %인지 구하시오.



추론 **05**

오른쪽은 어느 해 상반기에 방영한 모든 드라마의 평균 시청률을 조사하여 나타낸 도수분포다각형이다. 다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)



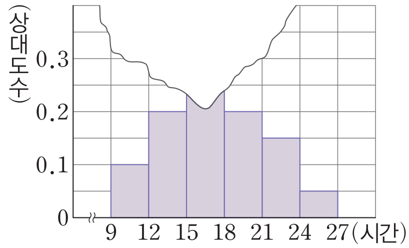
① 계급의 개수는 8이다.
② 계급의 크기는 3 %이다.
③ 상반기에 방영한 드라마는 모두 30편이다.
④ 시청률이 가장 높은 드라마의 평균 시청률은 20 %이다.
⑤ 평균 시청률이 13 %인 드라마가 속한 계급의 도수는 8편이다.

서술형 **06** 오른쪽은 지우네 동아리 회원 50명의 윗몸 일으키기 기록을 조사하여 나타낸 표이다. 다음에 답하시오.

기록(개)	도수(명)	상대도수
0이상 ~ 10미만	5	0.1
10 ~ 20	13	B
20 ~ 30	16	0.32
30 ~ 40	9	C
40 ~ 50	A	0.14
합계	50	D

(1) A, B, C, D의 값을 구하시오.
(2) 상대도수가 가장 큰 계급을 구하시오.
(3) 윗몸 일으키기 기록이 상위 32 % 이내에 속하려면 윗몸 일으키기를 몇 개 이상 해야 하는지 구하시오.

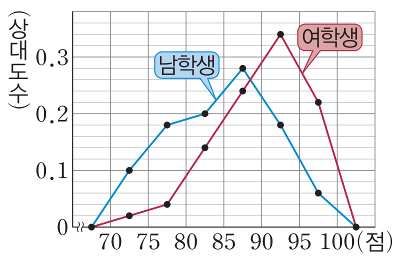
문제 해결 **07** 오른쪽은 서우네 학교 학생들의 연간 봉사 활동 시간에 대한 상대도수의 분포를 나타낸 그래프인데 일부가 찢어져 보이지 않는다. 12시간 이상 15시간 미만인 계급의 도수가 60명일 때, 15시간 이상 18시간 미만인 계급의 도수를 구하시오.



도전 문제

08 어느 중학교의 남학생과 여학생은 각각 300명, 200명이다. 하루 평균 수면 시간이 7시간 이상 8시간 미만인 남학생 수와 여학생 수의 비가 3 : 5일 때, 이 계급의 남학생과 여학생의 상대도수의 비를 구하시오.

서술형 **09** 오른쪽은 어느 중학교 남학생 150명과 여학생 200명의 미술 수행 평가 점수에 대한 상대도수의 분포를 나타낸 그래프이다. 다음에 답하시오.



(1) 남학생과 여학생 중에서 미술 수행 평가 점수가 85점 이상 90점 미만인 학생은 누가 더 많은지 말하시오.
(2) 미술 수행 평가 점수가 90점 이상인 학생은 전체의 몇 %인지 반올림하여 일의 자리까지 구하시오.

대단원 마무리

정답 및 풀이 309쪽

01 다음은 어느 아파트에 거주하는 일부 가구의 한 달 동안의 전기 사용량을 조사하여 나타낸 줄기와 잎 그림이다. 물음에 답하시오.

(28|4는 284 kwh)

줄기	잎
28	4 6
29	3 5 7 9
30	1 1 1 7 8
31	0 2 3 6 7
32	1 2 3 3 5 6 9
33	4 5 5 7

(1) 조사한 가구 수를 구하시오.

(2) 전기 사용량이 열 번째로 많은 가구의 전기 사용량을 구하시오.

02 오른쪽은 지희네 반 학생들의 몸무게를 조사하여 나타낸 줄기와 잎 그림이다. 다음 중에서 옳지 않은 것은?

(3|2는 32 kg)

줄기	잎
3	2 4 7 8 8
4	3 5 5 6 7 8
5	0 1 2 2 6
6	3 4 5
7	0

① 전체 학생 수는 20이다.

② 잎이 가장 많은 줄기는 4이다.

③ 몸무게가 적은 쪽에서 네 번째인 학생의 몸무게는 38 kg이다.

④ 몸무게가 55 kg 이상인 학생은 5명이다.

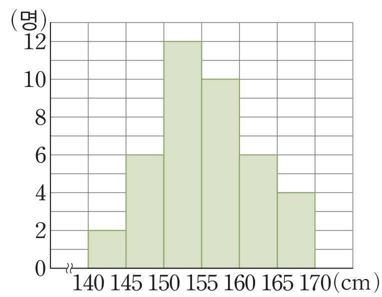
⑤ 몸무게가 40 kg 미만인 학생은 전체의 20 %이다.

03 다음은 민준이네 반 학생들의 통학 시간을 조사하여 계급의 크기가 다른 두 개의 도수분포표로 나타낸 것이다. A, B, C의 값을 구하시오.

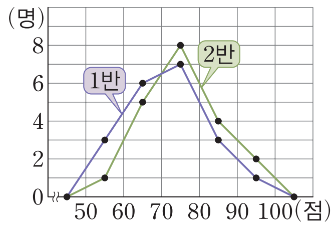
통학 시간(분)	도수(명)
$0^{이상}$ ~ $10^{미만}$	13
10 ~ 20	17
20 ~ 30	4
30 ~ 40	3
40 ~ 50	A
50 ~ 60	1
합계	40

통학 시간(분)	도수(명)
$0^{이상}$ ~ $15^{미만}$	20
15 ~ 30	B
30 ~ 45	C
45 ~ 60	2
합계	40

04 다음은 경수네 반 학생들의 키를 조사하여 나타낸 히스토그램이다. 키가 16번째로 큰 학생이 속하는 계급은 a cm 이상 b cm 미만이고 그 계급에 속하는 학생들은 전체의 c %라고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.



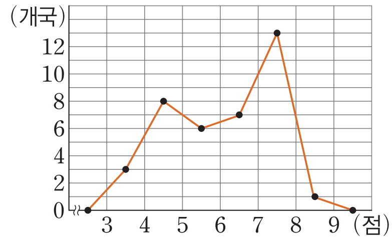
05 다음은 1반과 2반 학생들의 영어 시험 점수를 조사하여 나타낸 도수분포다각형이다. 2반에서 상위 30 % 이내에 드는 학생은 1반에서 최소 상위 몇 % 이내에 드는지 구하시오.



06 다음 중에서 옳지 않은 것은?

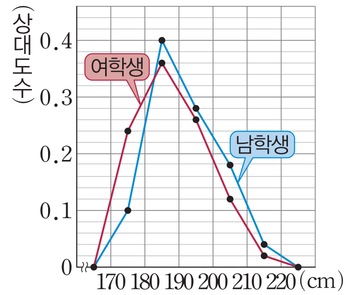
① 계급의 양 끝 값의 차를 계급의 크기라고 한다.
② 각 계급에 속하는 자료의 개수를 변량이라고 한다.
③ 도수의 총합은 변량의 총개수와 같다.
④ 전체 도수에 대한 각 계급의 도수의 비율을 상대도수라고 한다.
⑤ 도수의 총합이 다른 두 자료의 분포를 비교할 때에는 도수보다 상대도수를 비교하는 것이 더 적절하다.

07 다음은 2016년 OECD 회원국 국민들의 삶의 질 수준을 조사하여 나타낸 도수분포다각형이다. 도수가 가장 큰 계급의 상대도수를 반올림하여 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.



(출처: OECD, 2016)

08 오른쪽은 어느 중학교 학생들의 멀리뛰기 기록에 대한 상대도수의 분포를 나타낸 그래프이다. 다음 중에서 옳은 것은?



① 남학생 수와 여학생 수는 같다.
② 남학생의 기록 중 도수가 가장 큰 계급의 상대도수는 0.36이다.
③ 현승이의 기록이 203 cm일 때, 현승이는 남학생 중 기록이 좋은 쪽에서 20 % 이내에 든다.
④ 기록이 190 cm 미만인 여학생은 전체 여학생의 60 %이다.
⑤ 여학생이 200명일 때, 기록이 200 cm 이상 210 cm 미만인 여학생은 30명이다.

서술형

09 아래 표는 서진이네 반 학생들의 발 길이를 조사하여 나타낸 도수분포표이다.

발 길이(mm)	도수(명)
220이상 ~ 230미만	3
230 ~ 240	7
240 ~ 250	
250 ~ 260	4
260 ~ 270	
270 ~ 280	3
합계	32

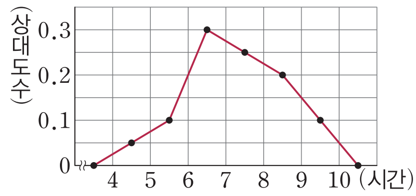
발 길이가 260 mm 이상인 학생 수가 260 mm 미만인 학생 수의 $\frac{1}{3}$일 때, 다음을 구하시오.

(1) 240 mm 이상 250 mm 미만인 계급의 도수

(2) 발 길이가 250 mm 미만인 학생 수

풀이

10 다음은 어느 학교 학생들의 주말 동안의 텔레비전 시청 시간에 대한 상대도수의 분포를 나타낸 그래프이다. 도수가 가장 큰 계급과 가장 작은 계급의 도수의 차가 70명일 때, 이 학교의 학생 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

자기 평가

만족 보통 미흡

❶ 자료를 줄기와 잎 그림과 도수분포표로 나타내고, 이를 해석할 수 있다.

❷ 도수분포표를 히스토그램과 도수분포다각형으로 나타내고, 이를 해석할 수 있다.

❸ 상대도수를 구하여 그래프로 나타내고, 상대도수의 분포를 이해한다.

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

세상 속 수학

Math ✕ Technology

빅 데이터

다양한 디지털 기기가 상용되면서 생성되는 데이터의 양이 기하급수적으로 증가하고 있다. 이와 같이 그 규모가 방대하고 생성 주기가 짧으며 수치 데이터뿐 아니라 문자와 영상 데이터를 포함하는 대규모의 데이터를 '빅 데이터(big data)'라고 한다. 최근에는 빅 데이터 속에 숨겨진 의미 있는 유형을 찾아내고 이를 기반으로 미래를 예측하는 기술이 중요해지고 있다.

빅 데이터를 활용하는 데 중요한 역할을 하는 것이 바로 '하둡(Hadoop)'이다. 하둡은 여러 개의 컴퓨터를 마치 하나인 것처럼 묶어 주는 기술로, 이를 통해 하나의 컴퓨터로는 불가능했던 빅 데이터를 효율적으로 분석하고 처리할 수 있게 하였다.

빅 데이터는 다양한 분야에서 활용되고 있다.

브라질의 리우데자네이루에서는 빅 데이터를 이용하여 교통, 전력, 홍수, 산사태 등의 자연재해와 수자원 등을 통합 관리할 수 있게 되었고, 싱가포르에서는 빅 데이터를 이용한 교통량 예측 시스템을 운영하여 교통 체증을 줄일 수 있게 되었다.

또한 서울시는 심야 시간의 택시 운행 동선과 휴대 전화 데이터 사용 지역에 대한 빅 데이터를 기반으로 유동 인구를 노선별, 요일별로 분석하여 심야 버스 노선을 최적화하였다.

이 밖에 포털 사이트의 연관 검색어, 쇼핑 사이트의 추천 상품, 기업의 마케팅 정보 제공 이메일 등에도 빅 데이터가 활용되고 있다.

심야 버스 노선 수립에 빅 데이터를 분석, 활용하는 과정

(출처: 서울시, 2014)

진로 탐색

빅 데이터 분석가 | 수많은 데이터 속에서 흐름을 찾아 분석하여 부가가치가 높은 결과물을 만들어 낸다.